Ziel heute: Stelle gegebene Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ bzgl. beliebiger Basen B von $\mathbb{R}^n$, B' von $\mathbb{R}^m$ dar.

Brauchen:

Def Eine durchnummerierte Basis heißt geordnet.

Seien B und B' geordnet von hier ab.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Es gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = B$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$:

Zu:

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff (s,t) \in \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker = 0.$$

Steinitz $\Rightarrow$ Basis

Wollen setzen

$$A_{B,B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

weil

$$A \cdot b_1 = 4 b_1 + 0 b_2$$
$$A \cdot b_2 = 0 b_1 + 2 b_2$$

<u>Def</u>: Geg. $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$, B geord. Basis von $\mathbb{R}^m$
B' geord. Basis von $\mathbb{R}^n$
$\{b'_1, \dots, b'_n\}$

Setze

$$(A_{B,B'})_{i,j} = \text{ i-te Koeffizient von } A \cdot b'_j \text{ in der Darstellung bzgl. } B.$$

Zeile (i) Spalte (j)

"Darstellungsmatrix von A bzgl. B, B'".

<u>Beobachtung</u> Ist $st_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$A_{st_m, st_n} = A.$$

<u>Frage</u> Wie berechnet man $A_{B,B'}$ geschickt?

$$A_{B,B'} \cdot e_i = \text{i-te Spalte von } A_{B,B'}$$
$$= \text{Koordinatenvektor von } (A \cdot b'_i) \text{ bzgl. } B.$$

Idee: 3 Schritte zur Berechnung von $A_{B,B'}$:

- brauchen Matrix $W_{B'} \in Mat(n,n)$ mit $W_{B'} \cdot e_i = b'_i$
- brauchen Matrix $K_B \in Mat(m,m)$ mit
  $K_B \cdot v$ = Koordinatenvektor von v bzgl B.
- Dann gilt ite Spalte von $A_{B,B'}$
  $= K_B(A \cdot (W_{B'} e_i))$

Offenbar: B geordnete Basis von $\mathbb{R}^n$

$$W_B = (b_1, \dots, b_n) \in Mat(n,n)$$

mit den b_i als Spalten.

Ziel bestimme K_B.

Dazu

Def: $A \in Mat(k,m)$, $B \in Mat(m,n)$ (Anzahl Zeilen)

Zeilenlänge Faktor 1 = Spaltenlänge Faktor 2.

$Mat(k,n) \ni A \cdot B = (A \cdot 1.\text{Spalte von } B, A \cdot 2.\text{Spalte von } B \dots A \cdot n\text{te Spalte von } B)$

in Formeln:

i-te Zeile von A j-te Spalte von B

$$(A\cdot B)_{ij} = \langle z_i^A , s_j^B \rangle$$

Zeile Spalte

$$= a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Bsp:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

- $n = 1$, also $B \in \mathrm{Mat}(m,1) = \mathbb{R}^m$

  Dann ist $A \cdot B$ gerade das Produkt des Matrix A mit dem Vektor B von Seite 1.

- $A \in \mathrm{Mat}(k,m)$

- $$\underset{\in\, \mathrm{Mat}(k,k)}{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}} \cdot A = \lambda \cdot A = A \cdot \underset{\in\, \mathrm{Mat}(m,m)}{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln $\quad A, A' \in \mathrm{Mat}(k,m)$, $B', B \in \mathrm{Mat}(m,n)$, $C \in \mathrm{Mat}(n,l)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $(A + A') \cdot B = (A \cdot B) + (A' \cdot B)$
- $A \cdot (B + B') = (A \cdot B) + (A \cdot B')$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Aber

$$! \quad A \cdot B \neq B \cdot A \quad !$$

sogar wenn $k = m = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also:

$$\mathrm{Mat}(m,n) \ni A_{BB'} = \underset{\mathrm{Mat}(m,m)}{\underset{\cap}{K_B}} \cdot \underset{\mathrm{Mat}(m,n)}{\underset{\cap}{A}} \cdot \underset{\mathrm{Mat}(n,n)}{\underset{\cap}{W_{B'}}}$$

Def $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) = E_n \in \mathrm{Mat}(n,n)$

$\rightsquigarrow \quad A \cdot E_n = A, \quad E_m \cdot A = A.$

Def $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ heißt <u>invertierbar</u> wenn es ein $B \in \mathrm{Mat}(n,n)$ gibt mit
$$A \cdot B = E_n = B \cdot A.$$

Lemma: $A, B, B' \in \mathrm{Mat}(n,n)$. Dann $A \cdot B = E_n = B' \cdot A$ so folgt $B = B'$. Insbesondere ist ein B wie oben eindeutig.

$\ulcorner$ $B = E_n \cdot B = (B' \cdot A) \cdot B = B' \cdot (A \cdot B) = B' \cdot E_n = B'$ $\lrcorner$

Def Man schreibt $B =: A^{-1}$, die <u>Inverse Matrix</u> von A.

Satz: Für jede geordnete Basis $\mathcal{B}$ ist $\omega_{\mathcal{B}}$ invertierbar mit
$$\kappa_{\mathcal{B}} = \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Lemma: $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n)$ invertierbar
$\Rightarrow$ $A \cdot B$ invertierbar und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\ulcorner$ $(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = E_n = B^{-1} E_n B = B^{-1} A^{-1} A B$ $\lrcorner$

Def: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^n$
$$\mathrm{Mat}(n,n) \ni W_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := W_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot W_{\mathcal{B}'}$$
heißt die <u>Basiswechselmatrix</u> von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

<u>Satz</u> Es gilt

$$A_{BB'} = W_{CB}^{-1} A_{CC'} W_{C'B'}$$

⌈ $A_{BB'} = W_B^{-1} A W_{B'} = W_B^{-1} W_C W_C^{-1} A W_{C'} W_{C'}^{-1} W_{B'}$

$= (W_C^{-1} W_B)^{-1} A_{CC'} W_{C'B'}$

$= W_{CB}^{-1} A_{CC'} W_{C'B'}$ ⌋

Wie berechnet man Inverse?

<u>Thm</u> $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$. Dann sind äquivalent

1) A ist invertierbar
2) die Spalten von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
3) für alle $b \in \mathbb{R}^n$ hat $Ax = b$ eine eindeutige Lösung
4) für alle $b \in \mathbb{R}^n$ hat $Ax = b$ eine Lösung
5) für alle $b \in \mathbb{R}^n$ hat $Ax = b$ höchstens eine Lösung
6) $\ker A = 0$, oder auch $\dim \ker A = 0$
7) $\mathrm{im}\, A = \mathbb{R}^n$, oder auch $\dim \mathrm{im}\, A = n$

<u>Bem:</u> Ist $A \in \mathrm{Mat}(n,m)$ so gilt

- $\exists\, B \in \mathrm{Mat}(m,n)$ mit $A \cdot B = E_n$
  $\Leftrightarrow \mathrm{im}\, A = \mathbb{R}^n$
- $\exists\, B \in \mathrm{Mat}(m,n)$ mit $B \cdot A = E_m \Leftrightarrow \ker A = 0.$

Bew:

Erinnerung: • Spalten von A bilden EZS

$\overset{def}{\iff}$ $Ax=b$ hat Lösung für alle $b\in\mathbb{R}^n$.

$\overset{def}{\iff}$ $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^n$

• Spalten von A linear unabhängig

$\iff$ $Ax=b$ hat immer höchstens eine Lösung

$\iff$ $\ker A = 0$.

also $2) \iff 3) \implies \begin{matrix} 4) \iff 7) \\ 5) \iff 6) \end{matrix}$

$$\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = n$$

also $6) \iff 7)$, und weil offenbar $4) + 5) = 3)$, bleibt somit nur

$3) \iff 1)$:

$1) \implies 3)$

Es gilt $Ax=b \iff x = A^{-1}b$.

$3) \implies 1)$

! Setze B = Matrix mit i-ter Spalte die Lösung von $Ax = e_i$.

Dann gilt $A \cdot B = E_n$ per Konstruktion.

Und $B \cdot A = E_n$, weil

$$A \cdot (B \cdot A) = (A \cdot B) \cdot A = E_n \cdot A = A.$$

also gilt

$$A(B \cdot A \cdot e_i) = A e_i$$

aber die Lösung von $A \cdot x = A \cdot e_i$ ist eindeutig also muss

$$B \cdot A \cdot e_i = e_i .$$

Aber $B \cdot A \cdot e_i$ ist die i-te Spalte von $B \cdot A$.

$$\leadsto B \cdot A = E_n .$$ ↯

Das liefert uns den Algorithmus: Löse das System

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A & e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \right)$$

mit Gauß-Jordan gleichzeitig auf. Dann gilt

A ist invertierbar $\Leftrightarrow$

$$\text{Zeilenstufenform} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & 0 & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \dots \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & \end{array} \right)$$

In dem Falle ist

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & A^{-1} \end{array} \right)$$

das Ergebnis des Algorithmus.

Bsp: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow W_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$II \rightsquigarrow II - I \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$II \rightsquigarrow II/2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$I \rightsquigarrow I - II \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow W_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{B,B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bew ($K_B = W_B^{-1}$):

T W_B invertierbar, weil Spalten bilden Basis nach Definition. Und:

$K_B \cdot (W_B \cdot e_i) = K_B \cdot b_i$ = Koordinaten von b_i bzgl B.

aber $b_i = 0 b_1 + \ldots + 1 \cdot b_i + \ldots + 0 \cdot b_n$

$= e_i$

$\rightsquigarrow$ $K_B \cdot W_B = E_n$. Also dann $K_B = W_B^{-1}$ nach Lemma.