Erinnerung

Satz (Transformationsformel)

Ist $\varphi: U \to V$ bijektiv, in jede Richtung stetig differenzierbar mit $\det D_x\varphi \neq 0$ für alle $x \in U$, wobei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det D_\varphi| = \int_V f$$

Heute gibt es Beispiele hierfür. Etwa:

1) $V = D_R^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dann können wir

$$\varphi: [0,R] \times [0,2\pi] \longrightarrow D_R^2(0)$$
$$(r, \varphi) \longmapsto (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$$

wählen. Eingeschränkt auf das Innere links ist φ bijektiv auf $U_R(0) - (R \times 0) \subseteq D_R(0)$; die verbleibenden Teile haben Flächeninhalt 0, spielen beim integrieren also keine Rolle.

Wir berechnen

$$D_{(r,\varphi)}\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det D_{(r,\varphi)}\psi = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r$$

$$\rightsquigarrow \int_{D_R^2(0)} f = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} (f\circ\psi)\cdot pr_1 \quad \text{mit } pr_1(r,\varphi) = r.$$

$$= \int_{[0,R]}\int_{[0,2\pi]} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\cdot r \, d\varphi \, dr$$

Bsp integriere $f(x,y) = 1$ über $D_R(0)$

$$\rightsquigarrow \int_{D_R^2(0)} 1 = \int_0^R\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr = 2\pi\int_0^R r\,dr$$

$$= 2\pi\cdot\left(\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right)$$

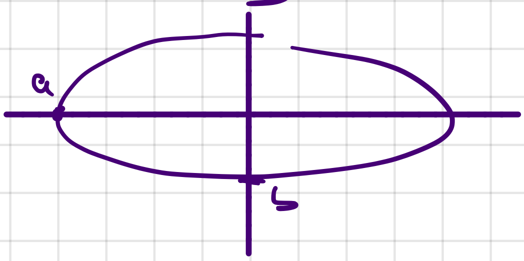
$$= \pi R^2$$

$\| \; \mathrm{Vol}(D_R^2(0))$

Ähnlich: $a,b > 0$

$$\mathcal{E}(a,b) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

Ellipse.



$$\psi : [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathcal{E}(a,b)$$
$$(r, \varphi) \longmapsto (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)$$

$$D_{(r,\varphi)}\phi = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -r\,a\sin\varphi \\ b\sin\varphi & r\,b\cos\varphi \end{pmatrix}$$

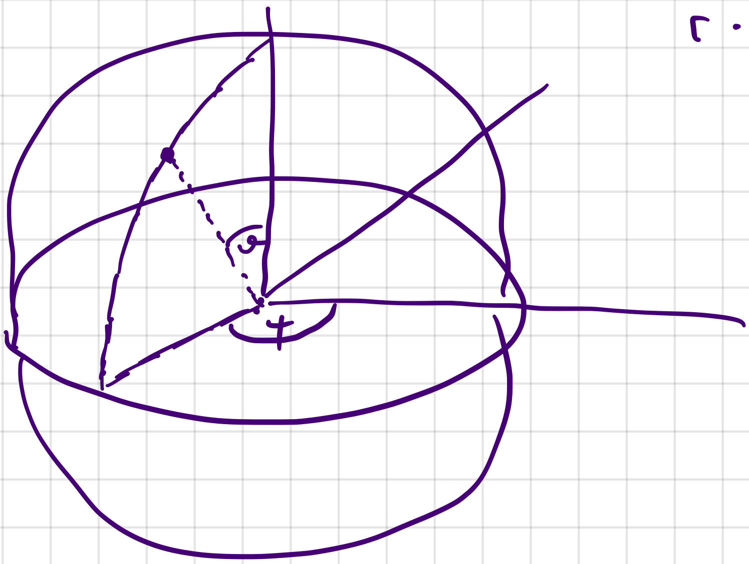
$$\rightsquigarrow \det D_{(r,\varphi)}\phi = r\,a\,b$$

$$\int_{E(a,b)} f = ab\int_{[0,R]}\int_{[0,2\pi]} f(ra\cos\varphi, rb\sin\varphi)\cdot r\,d\varphi\,dr$$

Eine Dimension höher erhalten wir

$$\phi : [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi] \longrightarrow D^3_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(r,\ \varphi,\ \vartheta) \longmapsto \big(r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\vartheta),\ r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\vartheta),\ r\cdot\cos(\vartheta)\big)$$



ist wieder bijektiv bis auf Dinge von Volumen 0.

$$D_{(r,\varphi,\vartheta)}\phi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\sin(\vartheta) & -r\cdot\sin\varphi\sin\vartheta & r\cdot\cos(\varphi)\cos\vartheta \\ \sin(\varphi)\cdot\sin\vartheta & r\cdot\cos\varphi\sin\vartheta & r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\cdot\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

4

$$\det D_{(r,\varphi,\vartheta)}\varphi = -r^2\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)^3 - r^2\sin(\vartheta)\sin(\varphi)^2\cos(\vartheta)^2$$
$$- r^2\cos(\varphi)^2\cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)$$
$$- r^2\sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)^3$$
$$= -r^2\sin(\vartheta)^3 - r^2\sin\vartheta\cos(\vartheta)^2$$
$$= -r^2\sin\vartheta$$

$$\rightsquigarrow \int_{D_R(0)} f =$$

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\cos(\varphi)\cdot\sin(\vartheta), r\cdot\sin(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos\vartheta)\, r^2\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

<u>**Bsp**</u> $f = 1$.

$$\mathrm{Vol}(D_R^3(0)) = \int_{D_R(0)} 1 = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$
$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\,\underbrace{(-\cos(\pi)+\cos(0))}_{2}\, d\varphi\, dr$$
$$= 4\pi\cdot\int_0^R r^2\, dr$$
$$= 4\pi\left(\tfrac{1}{3}R^3 - \tfrac{1}{3}0^3\right) = \tfrac{4\pi}{3}\cdot R^3$$

Rotationskoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (in $\mathbb{R}^{n+2}$)

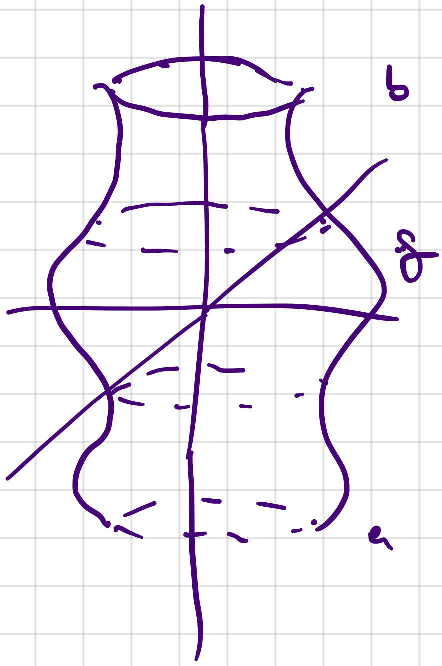
Sei $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig diff'bar.

Betrachte für $a < b \in \mathbb{R}$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$V_{a,b}(g) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\,(n+1)} \;\middle|\; \begin{array}{l} |(x,y)| \leq g(z) \\ z \in [a,b] \quad z \in U \end{array} \right\}.$$

$V_U(g)$

$V_{a,b}(g)$



$$\rightsquigarrow \quad \varphi : [0,1] \times [0,2\pi] \times \overset{U}{[a,b]} \longrightarrow V_{a,b}(g)$$

$$(r, \varphi, t) \longmapsto (g(t)\cdot r \cdot \cos\varphi, \; g(t)\cdot r\cdot \sin\varphi, \; t)$$

ist (fast) bijektiv.

$$D_{(r,\varphi,t)}\varphi = \begin{pmatrix} g(t)\cos\varphi & -g(t)\cdot r\cdot \sin\varphi & g'(t)\cdot r\cdot\cos\varphi \\ g(t)\sin\varphi & g(t)\cdot r\cdot\cos\varphi & g'(t)\cdot r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det D_{(r,\varphi,t)}\varphi = g(t)^2 r \cos(\varphi)^2 + g(t)^2 r \cdot \sin(\varphi)^2$$
$$= g(t)^2 r$$

$$\rightsquigarrow \int_{V_{a,b}(g)} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_a^b f(g(t) r\cos\varphi, g(t) r\sin\varphi, t)\cdot g(t)^2 r \, dt\, d\varphi\, dr$$

$$\int_{V_h(g)} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_h f(\ldots)\, d\varphi\, dr$$

Insbesondere

$$V_{a,b}(g) = \int_{V_{a,b}(g)} 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_a^b g(t)^2 r \, dt\, d\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \int_a^b r\, g(t)^2 \, dr\, dt$$

$$= \pi \int_a^b g(t)^2 \, dt$$

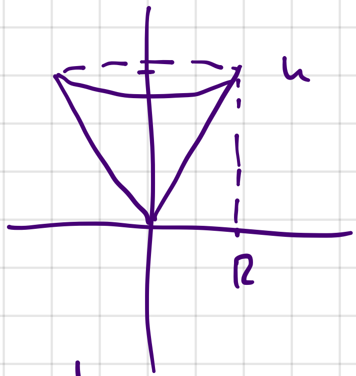
Bsp. • $g(t) = R$

$\rightsquigarrow$ $V_{a,b}(g)$ = Zylinder mit Radius R und Höhe $b-a$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Vol} = \pi R^2 (b-a)$

• $g(t) = \frac{R}{h} \cdot t$

$\Rightarrow$ $V_{0,h}(g)$ = Kegel mit Radius R und Höhe h

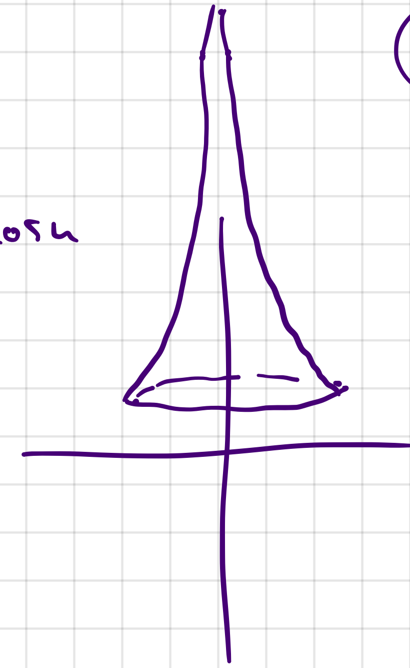


$$\rightsquigarrow \mathrm{Vol} = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} t^2 \, dt = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 = \frac{\pi}{3} R^2 h.$$

$f(h) = R$.

• $g(t) = 1/t$

$\Rightarrow V_{1,\infty}(g) =$ Gabriels Horn



$$\mathrm{Vol} = \lim_{a\to\infty} \pi \int_1^a \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \pi \left(-\frac{1}{a} + 1\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi .$$

ein unendlicher Körper mit endlichem Volumen.

Kugelvolumen in höheren Dimensionen:

$$\kappa_n := \mathrm{Vol}\left(D_1^n(0)\right) = \int_{D_1^n(0)} 1 = \int_{D_1^2(0)} \int_{D^{n-2}_{\left(\sqrt{R^2-|(x,y)|^2}\right)}(0)} 1 \; dx\,dy$$

Nun gilt $\mathrm{Vol}\left(D_R^n(0)\right) = R^n \cdot \mathrm{Vol}\left(D_1^n(0)\right)$, also

$$= \kappa_{n-2} \cdot \int_{D_1^2(0)} \left(R^2 - |(x,y)|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} dx\,dy$$

$$= \kappa_{n-2} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot r \; d\varphi\, dr$$

$$= 2\pi\, \kappa_{n-2} \int_0^1 \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot r \; dr$$

Substitution mittels $\varphi(r) = R^2 - r^2$.

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \kappa_{n-2} \int_0^1 r^{\frac{n-2}{2}} dr = \pi\, \kappa_{n-2} \left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}\, \kappa_{n-2}$$

Also folgt aus $\frac{2\pi}{n} k_{n-2}$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = \pi \sim 3{,}1$$

$$k_3 = \frac{4\pi}{3} \sim 4{,}2, \quad k_4 = \frac{\pi^2}{2} \sim 4{,}9, \quad k_5 = \frac{8\pi^2}{15} \sim 5{,}3$$

$$k_6 = \frac{\pi^3}{6} \sim 5{,}2, \quad k_7 = \frac{16\pi^3}{105} \sim 4{,}7, \quad k_8 = \frac{\pi^4}{24} \sim 4{,}0$$

allgemein: $k_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \quad k_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2n+1}$

<u>Bsp</u> die Stammfunktion von e^{-x^2} ist nicht durch die üblichen Funktion $(+,-,\cdot,\div, \log, \cos, \ldots)$ ausdrückbar. Aber:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \, dr$$

Substitution mit $\varphi(r) = -r^2$

$$= \pi \int_{-\infty}^{0} e^{r} \, dr$$

$$= \pi \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$