Guido Pinkernell
Florian Schacht (Hrsg.)

Digitale Kompetenzen und Curriculare Konsequenzen

Arbeitskreis Mathematikunterricht
und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung vom 27. bis 28. September 2019 an der
Pädagogischen Hochschule Heidelberg

verlag franzbecker

1. Auflage November 2020
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim

ISBN 978-3-88120-144-5

Guido Pinkernell, Florian Schacht (Hrsg.)

**Digitale Kompetenzen
und Curriculare Konsequenzen**

Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung
vom 27. bis 28. September 2019
an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

www.franzbecker.de

Vorwort

Der Arbeitskreis versteht sich als eine Plattform für die fachdidaktische Diskussion der Potentiale und Phänomene des Einsatzes digitaler Werkzeuge in Schule und Hochschule. Dabei nimmt er insbesondere die Wirkungen dieser Werkzeuge auf das Lernen und Lehren von Mathematik in den Blick:

- Digitale Werkzeuge erweitern und verändern den Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren, indem sie Möglichkeiten zur Vernetzung, Dynamisierung und Interaktion eröffnen.
- Digitale Werkzeuge verändern den Umgang mit Mathematik beim Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellungen Verwenden, Rechnen und Kommunizieren.
- Digitale Werkzeuge sind Produkte der Informatik. Sie ermöglichen die Verankerung informatischer Ideen wie Formalisierung, Algorithmisierung und Modularisierung auch im Mathematikunterricht.
- Digitale Werkzeuge verändern die Unterrichtspraxis und stellen neue Anforderungen an das Klassenmanagement.
- Digitale Werkzeuge sind allgegenwärtig und berühren so Fragen zur Allgemeinbildung wesentlich.

Dieser Band versammelt die Beiträge für die Herbsttagung des Arbeitskreises 2019. Sie spiegeln die oben angedeutete Vielfalt von Forschung und Praxis des Einsatzes digitaler Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht aufs Eindrücklichste wider. Insbesondere die beiden Hauptvorträge von Reinhard Oldenburg und Thilo Höfer bestätigen, dass das Motto der Herbsttagung „Digitale Kompetenzen und Curriculare Konsequenzen“ an Aktualität nicht verloren hat.

Wir danken den Autor*innen und Gutachter*innen für ihre Mitwirkung an der Erstellung dieses Bandes.

Heidelberg, im März 2020

Guido Pinkernell und Florian Schacht

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Bildung für das digitale Zeitalter

Reinhard Oldenburg

Schulische Bildung soll Jugendlichen ermöglichen, in der Welt in der sie leben kompetent und selbstbestimmt zu leben und sich zu entfalten. Wenn die Digitalisierung die Welt verändert, dann muss Schule darauf reagieren und zwar nicht nur, indem sie die digitalen Medien nutzt um "altes" Wissen effektiver zu vermitteln, sondern auch um neues Wissen bereitzustellen. Deswegen ist eine Weiterentwicklung der Curricula aller Fächer, insbesondere aber auch die der Mathematik, eine wichtige Aufgabe. Neben konkreten Inhalten kommt dabei der Entwicklung des fachbezogenen "Computational Thinking" eine zentrale Rolle zu.

Einleitung

In der Debatte um die Digitalisierung der Bildung steht gegenwärtig die Idee der Mediennutzung im Vordergrund, d.h. die digitalen Tools werden benutzt, um die bisherigen Inhalte effektiver, flexibler und/oder motivierender zu unterrichten. Zwei unterschiedliche aber exemplarische Belege dieser These: Der Untertitel des hervorragenden Lehrbuchs von Weigand&Weth (2003) lautet „Neue Wege zu alten Zielen". Der Philologenverband hat den eigenen Innovationspreis an eine Gruppe von Lehrkräften vergeben, die intensiv mit der flipped-classroom Technik arbeiten (Vodafone Stiftung, Deutscher Philologenverband 2019).

Es soll keineswegs behauptet werden, dass dies unzulässige Ziele seien oder dass die Aktivitäten, die dieses Ziel der besseren Vermittlung „alter" Inhalte verfolgen, dazu ungeeignet seien. Hauptthese dieses Aufsatzes aber ist, dass dies nicht alles ist und dass der größere Teil der Arbeit auf dem Weg zu einer mathematischen Bildung für die Informationsgesellschaft noch vor uns liegt. In gewissem Sinne ist diese Erkenntnis nicht neu. Schon 1993 wurde bei der Tagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik in diesem Sinne diskutiert (Hischer 1993). Trotzdem ist ein neuer Blick sinnvoll, der neuere Entwicklungen umfasst. Dabei werden auch einige offene Fragen benannt, die zukünftig diskutiert werden sollten.

Theorien

Zur Strukturierung des Gebiets der digitalisierten Bildung gibt es verschiedene Theorien und Modelle. Ein international sehr einflussreiches ist das SAMR-Modell von (Puentedura 2006, Hamilton et al. 2016), das eine Stufenfolge des Einflusses digitaler Technologien auf den Unterricht beschreibt (Abb. 1).

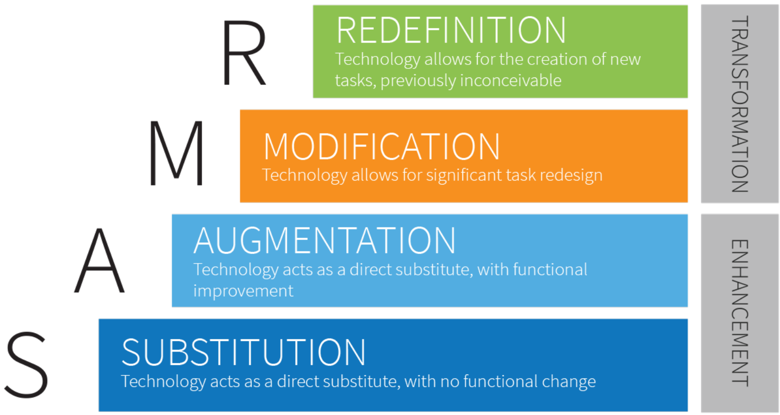


Abb. 1: Das SAMR-Modell (Bildquelle: https://www.schoology.com/blog/samr-model-practical-guide-edtech-integration)

Das SAMR-Schema lässt sich sowohl auf die Unterrichtsmethoden als auch auf Unterrichtsinhalte anwenden. Zur Illustration kann der doppelte Würfelwurf dienen (Tabelle 1).

Stufe	**Methodisch (physischer Würfel)**	**Inhaltlich (virtueller (digitaler) Würfel)**
S	Excel statt Papiertabelle	Zufallsgenerator statt Würfel[1]

A	Balkendiagramme in Excel	Pseudowürfel mit automatischer Zählung
M	Ergebnisse werden in der Klasse “geteilt”, statt an die Tafel geschrieben	Iteration: Streuung abschätzen: $\sqrt{n}$ - Gesetz wird plausibel
R	Kumulation der Ergebnisse über soziale Netzwerke über viele Klassen hinweg	Summe vieler Würfel: Zentraler Grenzwertsatz wird erlebbar

Tabelle 1: Das SAMR-Modell angewendet

Nota bene: Die Erfahrung mit physischen Objekten ist wichtig, es soll hier kein Vorrang einer digitalisierten postuliert werden. Wer jemals gesehen hat, wie ungeübt heute Schüler/innen einen Spielwürfel in die Hand nehmen und wie lange sie benötigen, die Augenzahl zu erfassen, weiß, dass die eigene Erfahrung unerlässlich ist! Aber: Zu einer umfassenden Bildung gehört, dass man auch an solchen fast schon klassischen Inhalten erfahren kann, welche Bedeutung die Digitalisierung bietet, welche Erweiterung der handlungs- und Erfahrungsmöglichkeiten darin steckt. Und, wenn man das Beispiel genau anschaut, lässt sich noch etwas Wichtiges erkennen: Die neuen Methoden ermöglichen nicht nur neue Inhalte[2], sie fordern sie auch

1 Man mag fragen, wieso die Verwendung eines Zufallsgenerators statt eines physischen Würfels hier als inhaltliche Veränderung betrachtet wird. Dies liegt daran, dass ich mir vorstelle, dass die Natur des Zufalls im Unterricht diskutiert werden muss, wenn man das Bildungspotential ausnutzen will, dann ist eine inhaltliche Diskussion unerlässlich. Dies kann altersgerecht ohne Verteilungsannahmen, Hypothesentests etc. geführt werden: Beim physischen Würfel ist die genaue Flugbahn, das Landen und Rollen so unvorhersehbar, dass man nicht vorhersehen kann, welche Zahl der Würfel letztlich zeigen wird. Beim Zufallszahlengenerator rechnet der Computer mit riesigen Zahlen komplizierte Dinge und nimmt dann aus einer langen Zahl ein paar Stellen: Auch das ist unvorhersehbar.

ein: Wie erzeugt ein deterministischer Computer Zufallszahlen? Sind diese fair? Wie kann man das testen?

Meine These ist, dass Redefinition langfristig noch wichtiger werden wird, sowohl methodisch, insbesondere aber auch inhaltlich. Digitalisierung verändert die Welt, deswegen müssen die Inhalte folgen. Dies ist eine Aufgabe, der sich alle Schulfächer stellen müssen. Einige Beispiele:

- Kunstlehrkräfte sollten subtraktive Farbmischung nicht nur mit dem mit Pelikanfarbkasten, sondern auch mit Photoshop beherrschen (und Mathelehrkräfte sollten einen Einblick in die Mathematik dahinter haben)
- Biologielehrkräfte sollten wissen, wie nah oder fern die Vision der „Cyborgs" ist (Cochlea Implantate etc.), wieso DNA Sequenzierung, Populationsmodelle und Tomographie ohne digitale Werkzeuge nicht wirklich denkbar sind (und Mathelehrkräfte sollten einen Einblick in die Mathematik dahinter haben)
- Sozialkundelehrkräfte sollten Auswirkungen von Human Computation, gesteigerter Markttransparenz und Krypto-Geld kennen (und Mathelehrkräfte sollten einen Einblick in die Mathematik dahinter haben)
- Deutschlehrkräfte sollten Sprachen in Hinblick auf ihre Eindeutigkeit neu reflektieren und so Grundlagen von automatischen Übersetzern und Grammatikprüfern verstehen (und Mathelehrkräfte sollten einen Einblick in die Mathematik dahinter haben)

Eines dieser Beispiele sei hier etwas ausführlicher erklärt: Während in den alten Zeiten der „Personal Computer" die Menschen vernetzt waren und einzelne Aufgaben, die sie nicht oder nicht schnell erledigen konnten an Computer abgaben, dreht sich das im Bereich des Human Computation um:

---

2 Die neuen Inhalte müssen zunächst Themen der Lehrerbildung sein und dann auch Themen des Unterrichts. Die Frage, in welchem Fach sie zu behandeln sind, ist mE sekundär: Zunächst stellt man fest, dass etwas allgemeinbildend ist, dann sucht man den Ort dafür. Allerdings scheint mir die mathematische Perspektive so grundlegend, dass ich für dieses Fach plädiere.

Computer sind vernetzt und zur Bewältigung bestimmter Aufgaben, die sich nicht so gut können (z. B. Übersetzen, eine Hausarbeit bewerten, die Attraktivität des Photos eines Schokoriegels bewerten etc…) werden Menschen „als Unterprogramm aufgerufen“. Viele der Aufgaben, die bereits so vergeben werden, sind relativ einfach und auf Plattformen wie „amazon meachanical turk“ tummelt sich ein Herr von Arbeiter/innen, die kleine Aufgaben übernehmen, für die sie relativ bescheiden entlohnt werden. Dieser Arbeitsmarkt ist international, maximal flexibel (keine Gewerkschaften oder Betriebsräte) und anonym (man weiß in der Regel nicht wirklich, für wen man arbeitet), es handelt sich um sogenannte entgrenzte Arbeit.

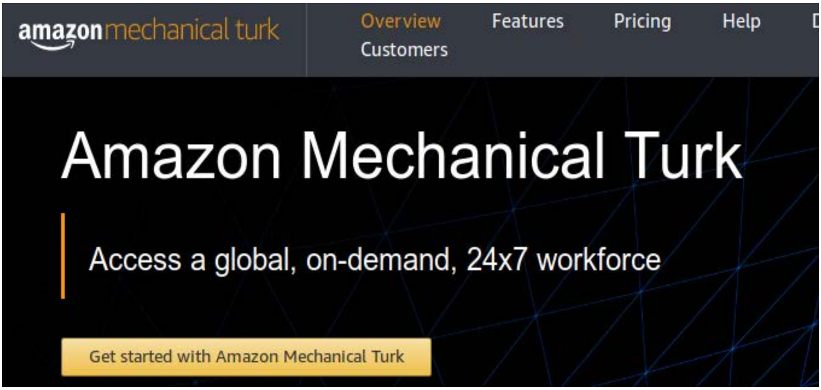
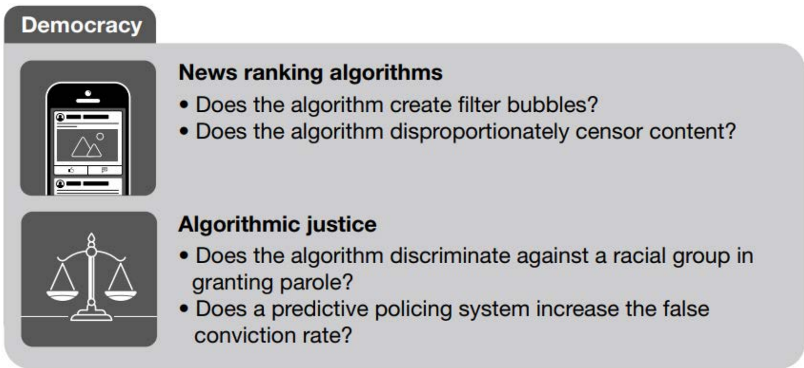


Abb. 2: Amazon mechanical turk bringt die soziale Sprengkraft gleich im Untertitel (Bildquelle: https://www.mturk.com/)

Welche Kompetenzen benötigt man, um diesen Entwicklungen gewachsen zu bleiben? Dies ist eine der großen didaktischen Fragen unserer Zeit und es gibt vermutlich keine gute Antwort. Noch schwieriger ist es abzuschätzen, welchen Teil des Beitrags der Mathematik zur Digitalisierung verstanden werden muss. Es ist zwar für Experten, wenn auch nicht für Schüler, (jeweils mit -innen) offensichtlich, wo Mathematik und Logik eine Rolle spielt, vom NAND-Gatter in einem Chip über Ähnlichkeitsmaße wie

Regressionskoeffizienten bis hin zu den Methoden der künstlichen Intelligenz. Aber es stellt sich die Frage, was man davon verstehen muss, um mit dem ganzen arbeiten zu können. In der Informatikdidaktik war man in den 80er-Jahren des letzten Jahrhunderts noch der Meinung, man sollte verstehen, wie die digitale Hardware funktioniert, wie man Gatter zu Addieren von Binärzahlen verschaltet oder zu einem Flipflop, mit dem man 1 Bit an Information speichern kann. Davon ist man heute weggekommen. So wenig wie ein Koch die Molekularstruktur von Salz kennen muss, um die richtige Dosis zu finden, so wenig braucht man solche Detailansichten der Hardware. Andererseits kann man ohne angemessene mentalen Modelle (Gentner, Johnson-Laird, siehe Darstellung in Weigend (2007)) kaum mit so komplexen Systemen wie Computern arbeiten. Man braucht eine Modellvorstellung dazu, dass es dort permanente und flüchtige Speicher gibt u.s.w..

In einem grundlegenden Aufsatz haben Rahwan et al. (2019) das Problem aufgeworfen, wie das Bildungssystem als Ganzes zu einer angemessenen Beschreibungsebene kommen kann, um der Digitalisierung gerecht zu werden. Die zu erklärenden Phänomene haben sie dabei in vier Bereiche eingeteilt und wie folgt graphisch dargestellt:



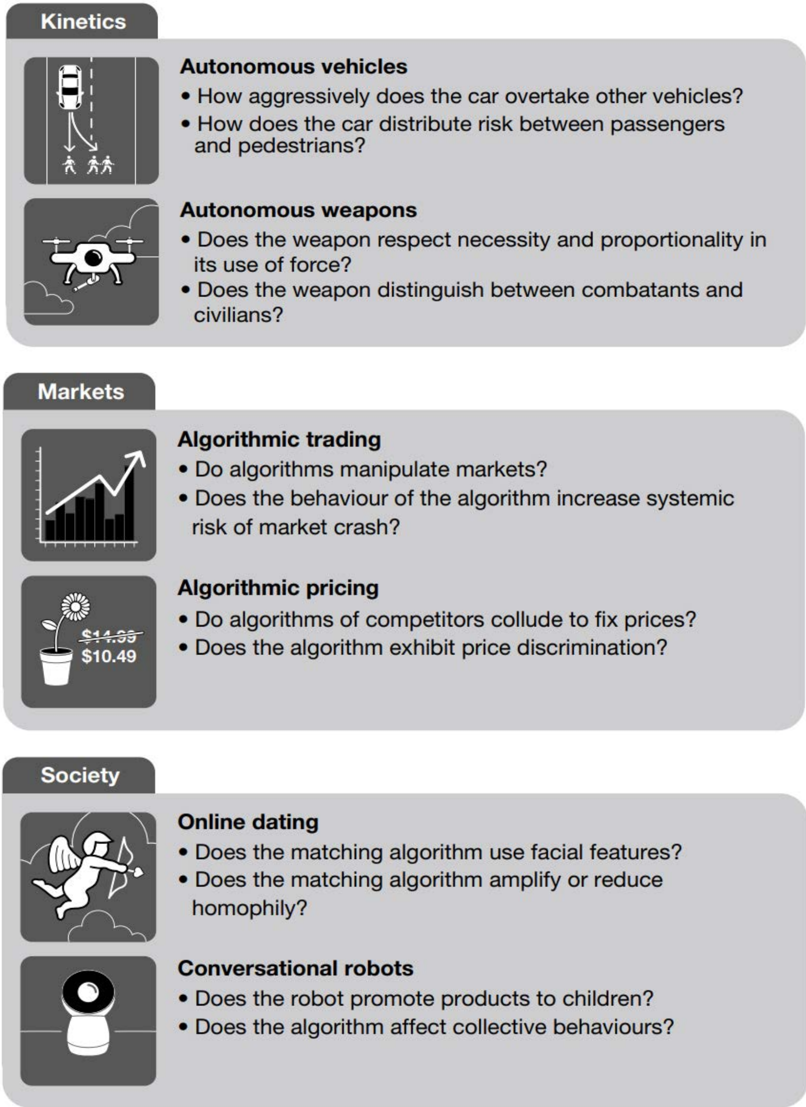


Abb. 3: Zielbereiche digitaler Bildung
(Bildquelle: https://www.nature.com/articles/s41586-019-1138-y.pdf)

Auf einem ganz abstrakten Niveau kann man diese Dinge ohne jede Mathematik verstehen. Aber schon ein etwas genauerer Blick zeigt viele mathematische Konzepte: Es geht ganz oft darum, Sachverhalte auch numerisch einzuschätzen und auf dieser Basis eine optimale Lösung zu finden. Wie so etwas funktionieren kann und wie gut, das erfordert etwas mehr theoretisches Wissen. Ich bin sicher, dass jeder Leser selbst eine Reihe von Ideen hat, deswegen will ich nur illustrieren, dass auch Ergebnisse der reinen Mathematik nötig sind, dass auch Beweise und nicht nur Wissen der praktischen Umsetzbarkeit wichtig sind:

- Demokratie und Algorithmische Gerechtigkeit: Es lässt sich beweisen, dass es keinen Algorithmus der Sitzverteilung bei Wahlen gibt, der naheliegende Gerechtigkeitsaxiome erfüllt (siehe Themenheft „Wahlen“ von „mathematik lehren“ 1998).
- Kinetik und Straßenverkehr: Es gibt Nash-Gleichgewichtsflüsse von Verkehr auf bestimmten Graphen, die zu ewigem Kreisverkehr führen
- Märkte: Auch in der Wirtschaft können Simpsonparadoxa auftreten und damit bestimme algorithmische Entscheidungen tangieren.
- Gesellschaft und Dating: Existenzbedingung für perfekte Matchings (Satz von Hall)

Wie kann Digitalisierung auf den Unterricht wirken? Modelle und Vorgaben dazu gibt es einige, allerdings reflektieren längst nicht alle die Bedeutung der Mathematik (Beispiele: „Bildung in der digitalen Welt“ der Kultusministerkonferenz (beschlossen am 8.12.2016); Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft (BMBF 2016)). Die Kultusministerkonferenz hat einen Kompetenzbaum publiziert (https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/KMK_Kompetenzen_-_Bildung_in_der_digitalen_Welt_Web.html). Wenn man diesen Plan anschaut, fallen einige wesentliche Merkmale auf:

- Der Fokus liegt auf der Mediennutzung. Dem sind die ersten vier Säulen fast ganz (bis auf das Produzieren von Medien) und die letzten beiden teilweise gewidmet.
- Beispiele, wie die digitalen Werkzeuge den Zugriff auf die physische wie mathematische Welt und nicht nur auf kulturelle Produkte ermöglicht, finden sich nur ansatzweise in 5.5 (Algorithmen erkennen und formulieren).
- Eine Rolle der Mathematik ist nirgend erkennbar.

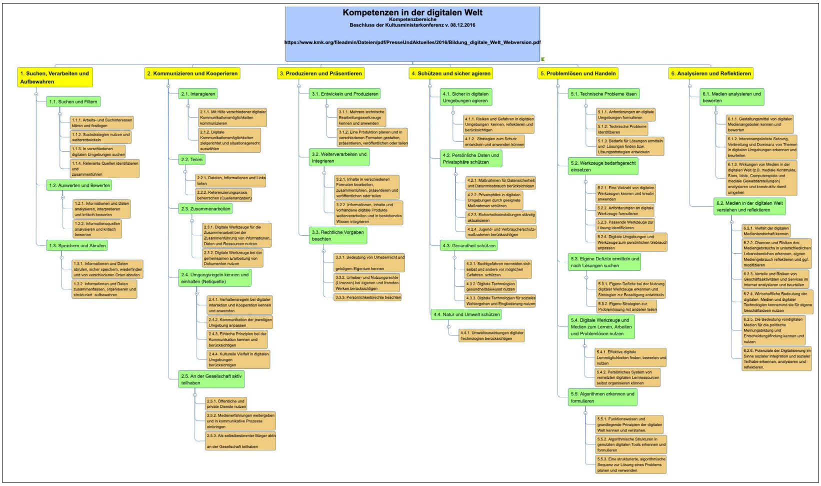


Abb. 4: Kompetenzplan der KMK - mit Hervorhebungen
(Bildquelle: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/KMK_Kompetenzen_-_Bildung_in_der_digitalen_Welt_Web.html)

Die Schwerpunktsetzung auf Mediennutzung ist schlüssig, wenn die Heranwachsenden zu kompetenten Konsumenten werden sollen. Dass Bildung aber auf mehr zielen kann und m.E. auch sollte hat in der Mathematikdidaktik eine Tradition, deren Wurzeln in die Zeit vor der Digitalisierung heranreichen: So hat Heinrich Winter (1985 und 1992) dem Sachrechnen drei Funktionen zugewiesen:

- Sachrechnen als Lernstoff: Wissen über die Sache gewinnen
- Sachrechnen als Lernprinzip: Die Sache nutzen um (Mathe) zu lernen
- Sachrechnen als Lernziel: Eine Synthese davon

Diese Sichtweise lässt sich problemlos auf die Funktionen der Digitalisierung übertragen:

- Digitalisierung als Lernstoff: Wissen über die Prinzipen digitaler Werkzeuge und ihren Einfluss auf Gesellschaft und Wissenschaft gewinnen
- Digitalisierung als Lernprinzip: Digitale Werkzeuge nutzen, um (Mathe) zu lernen: Videos, Simulationen (inkl der Simulation von Zirkel&Lineal durch DGS).
- Digitalisierung als Lernziel: Synthese: Verständnis der Wechselwirkung von Mathematik und Digitalisierung

Hort Hischer (2002) hat in seiner integrativen Medienpädagogik (siehe Abb. 5) drei Bereiche identifiziert, die dem weitgehend entsprechen:

Abb. 5: Medienpädagogik nach Horst Hischer

Am Beispiel eines einfachen Funktionenplotters lässt sich Hischers Theorie gut verstehen:

- Mediendidaktik findet beispielsweise statt, wenn die Funktionsplotter eingesetzt werden, um den Lernenden zu ermöglichen, die Graphen der Funktionen $f_n(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$ zu untersuchen. Dies wäre „Digitalisierung als Lernprinzip" im übertragenen Sinne Winters.
- Medienkunde findet statt, wenn erforscht wird, wie ein Funktionenplotter arbeitet, ggf. auch, indem ein eigener Plotter in einer Programmiersprache geschrieben wird. Dies wäre „Digitalisierung als Lernprinzip" im übertragenen Sinne Winters.
- Medienerziehung schließlich findet statt, wenn auf Basis der ersten beiden Säulen reflektiert wird, welche Phänomene ein Funktionsplotter prinzipbedingt nicht zeigen kann, etwa beim Plotten des Graphen von $\dfrac{x^2-1}{x^2-1.0001}$ oder $\sin(k\cdot x), k\in\mathbb{N}, n\gg 100$. Dies wäre „Digitalisierung als Lernziel" im übertragenen Sinne Winters.

Meine These lautet, dass in der bisherigen Digitalisierungsdebatte Digitalisierung als Lernprinzip dominiert. Dies hängt zusammen mit einem Übergewicht der Methodik über die Inhalte. Wir haben eine weitgehende Stabilität der Inhalte bei Variabilität und Modernisierung der Methoden. Typische Beispiele sind die Ideen des Flipped Classrooms oder die Zielsetzung in der Digitalisierung der Lehrerbildung meiner eigenen Universität: „Das Kompetenzzentrum für Digitales Lehren und Lernen (...) unterstützt Studierende und Dozierende in den Lehramtsstudiengängen der Universität Augsburg beim Kompetenzerwerb hinsichtlich eines effektiven Einsatzes digitaler Medien zur Förderung von Lehr-, Lern- und Bildungsprozessen." (https://www.uni-augsburg.de/de/forschung/einrichtungen/institute/zlbib/digillab/). All diese Aktivitäten sind nicht falsch, aber m.E. unzureichend, wenn man nicht nur Bildung in einer digitalen Welt erreichen will, sondern Bildung für eine digitale Welt. Damit stellt sich die Aufgabe, die Perspektiven von Lernstoff und Lernziel didaktisch in den Fokus zunehmen und zu einer modernen Stoffdidaktik der digitalen Welt zu kommen.

In der Informatikdidaktik hat sich das Konzept des „Computational thinking“ bewährt, dass auch Bedeutung für den Mathematikunterricht hat. Die verbreitete graphische Darstellung (Abb. 6) erinnert entfernt an Modellbildungskreisläufe. Computational Thinking in der Mathematik kann bedeuten:

- Abstraction: Sprache und Bedeutungskonstruktion
- Automation: Algorithmisches Denken
- Analysis: Erkenntnis durch Reflexion über (algorithmische) Prozesse

Ein sehr traditionelles Beispiel: Um Punkte auf der Zahlengeraden zu beschreiben, benötigt man eine formale Sprache, z. B. die der (nicht notwendig abbrechenden) Dezimalbrüche. Diese kann man lesen als einen Algorithmus den Punkt zu finden: Mit jeder weiteren Stelle, die der Algorithmus liest, verfeinert er das bisher gefundene Intervall in zehn Teilintervalle. Durch Reflexion kann man zum Axiom gelangen, dass jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl erfassen sollte und das sich nicht jede solche Zahl als Bruch schreiben lässt. Dieser und weiteren inner-mathematischen Anwendungen liegt die generelle Strukturähnlichkeit von Sätzen und Algorithmen zugrunde: Es gibt Voraussetzungen des Satzes bzw. Eingabespezifikation des Algorithmus, Schlüsse, die gezogen, bzw. Ausgaben, die gemacht werden und zur Legitimation dienen Beweise der Aussage bzw. der Korrektheit und Terminierung. In der Tat lassen sich viele Algorithmen als Beweise lesen (z. B. Intervallschachtelung).

Der Rest des Aufsatzes ist den Aspekten der digitalisierten Bildung gewidmet, die über die reine Mediennutzung zum Erwerb „alten“ Wissens hinausgehen.

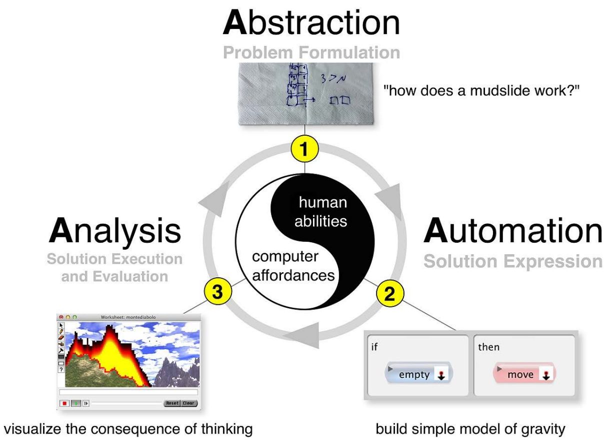


Abb. 6: Computational Thinking (Bildquelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_thinking)

Kognitiver Einfluss auf den Umgang mit Mathematik

Dieser Abschnitt stellt einen Exkurs dar, mit dem ich die Sichtweise unterstützen will, dass digitale Werkzeuge nicht nur ein Medium zum Lernen von Mathematik sind, sondern die individuelle Konstruktion mathematischer Bedeutung wesentlich beeinflussen. Sicher sind Kognition und „Computation“ verschiedene Dinge, aber sie sind doch enger aufeinander bezogen, als man auf den ersten Blick vermuten mag.

Abstraktes Denken verwendet Zeichen und wie diese zu ihrer Bedeutung kommen ist damit zentraler Teil des Mathematiklernens. In der Semiotik-basierten Mathematikdidaktik hat sich Peirce als Ideengeber bewährt (Dörfler 2016). Nach Peirce können Zeichen sein: Ikone (Bilder), Indizes (mit einer kausalen Verknüpfung) und Symbole. Letztere sind dadurch gekennzeichnet, dass die Zuschreibung der Bedeutung willkürlich ist. Dies ist für die Mathematik von besonderer Bedeutung und damit stellt sich die Frage, wie die Verbindung von Symbol und Bedeutung zustande kommt. Die Semiotik selbst legt eine Referenztheorie der Bedeutung nahe. Und auch wenn aus philosophischer Sicht daran sehr grundlegende und berechtigte Kritik geübt wurde, kann man doch festhalten, dass die Referenzidee in der Informatik zu klaren semantischen Implementationen mathematischer Konzepte geführt hat. In fast allen Programmiersprachen kann man addieren indem man z. B. a=2;b=3;a+b berechnen lässt. In Programmiersprachen (z. B. Scheme (http://www.scheme-reports.org/) oder Julia (https://julialang.org/)), die die Referenzidee stark machen, ist das besonders leicht und konsistent zu erklären: a,b,+ sind Symbole, die auf etwas verweisen. Die Referenz von a,b wird vom Programmierer gesetzt, die von + ist schon vorgegeben. Die Auswertungsregel besagt im Wesentlichen, dass Referenzen aufgelöst werden. Insbesondere manifestiert sich die Bedeutung des Zeichens + darin, dass es auf eine Prozedur verweist. So kann man in Julia den folgenden Dialog haben:

```
julia> +
+ (generic function with 163 methods)

julia> addiere=+
+ (generic function with 163 methods)

julia> addiere(2,3)
5
```

Abb. 6: Referenz auf + in der Sprache Julia

Diese referentielle Sicht ist ebenfalls die der Semantik in der Prädikatenlogik nach Tarski: Dort wird die Referenz durch Interpretationen der logischen Formeln gegeben.

Eine zweite Säule, die Bedeutung von Symbolen festzulegen ist die Idee, dass die Bedeutung durch das Sprachspiel festgelegt wird, d.h. durch die erlaubten Verwendungsweisen, durch Axiome (Hilberts Sicht!) und Regeln. In einigen Computeralgebrasystemen wird die Bedeutung beispielsweise von + dadurch festgelegt, welche Umformungsregeln auf Ausdrücke, die + enthalten, angewendet werden. Ein solches System ist Mathematica (https://www.wolfram.com/mathematica/). Darin ist + nur eine syntaktische Kurzschrift für Plus, und Plus selbst hat keine Referenz, aber das System kennt z. B. die Regel, dass Plus[0,x] immer zu x vereinfacht wird. Die

Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes zeigt z. B. auch die Sprache Pure (https://agraef.github.io/pure-lang/), in der sich ein kleines Computeralgebrasystem in fünf Minuten programmieren lässt (Oldenburg 2017).

Die Computertechnologie zeigt damit auf, dass beide Philosophien der Bedeutungsgeneration technisch umsetzbar sind. Das zeigt zum einen deren Widerspruchsfreiheit, zum anderen bietet die Beschäftigung mit diesen Systemen die Möglichkeit des Hineinwachsens in diese symbolischen Kulturen (es ist daher auch plausibel, dass Noss (1986), Tall (1991) und Ekenstam & Greger (1993) einen positiven Effekt von Programmieren in Logo auf das Verständnis von Variablen als Referenzen gefunden haben). Für die Didaktik ist weiter bedenkenswert, dass es einen Weg von der zweiten zur ersten Sichtweise gibt: Reifikation. Dies löst ein Problem der Referenztheorie. Damit diese funktioniert, müssen ja die zu referierenden Objekte schon als mentale Objekte vorliegen – aber wie entstehen diese. Sfard (2000) hat gut begründet, dass dies durch Abstraktion aus Prozessen gewonnen werden können. Damit ist plausibel gemacht, dass die Bedeutungskonstruktion in Wechselwirkung von Technologie und Gehirn möglich ist.

- Digitalisierung als Lernstoff: Man erwirbt Wissen, wie symbolische mathematische Strukturen im Computer repräsentiert und verarbeitet werden können
- Digitalisierung als Lernprinzip: Digitale Werkzeuge geben einen Rahmen ab, in dem man mit mathematischen Objekten interagieren kann und ihre Bedeutung erleben kann
- Digitalisierung als Lernziel: Es kann ein Verständnis für Leistungen und Grenzen des symbolischen Denkens erreicht werden.

Mathematik Digital verstehen

Dieser kurze Abschnitt bringt noch einen neuen Blick auf zwei klassische Themen der Mathematik um zu illustrieren, wie Digitalisierung als Lernprinzip realisiert werden kann. Dabei zeigt sich aber, dass die Isolation dieses Aspektes weder möglich noch wünschenswert ist.

Negative Zahlen sind ein didaktisches Problem vor allem deswegen, weil man sie in konkreten Situationen eigentlich nicht benötigt. Man kann immer durch Worte klar machen, ob ein Geldbetrag als Guthaben oder als Schulden zu sehen ist, ob eine Höhe über oder unter dem Meeresspiegel liegt. Nützlich werden negative Zahlen erst, wenn man etwas allgemein beschreiben will oder muss, z. B. wenn man programmiert. Wenn man etwa in Scratch eine Figur programmieren will, die auf dem Bildschirm hin und herläuft, ist eine Lösung mit negativen Zahlen wie in Abb. 7 viel eleganter und kürzer, als eine, die nur mit positiven Zahlen arbeitet. Exakt der gleiche Punkt gilt bezüglich der Beschreibung etwa von Pendelbewegungen in der Physik: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung können nicht alle positiv sein, ohne dass man die Bewegung mühsam in Abschnitte zerlegen muss.

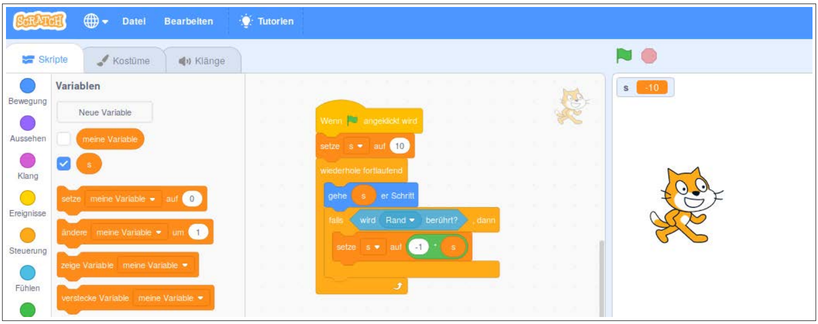


Abb. 7: Negative Zahlen in Scratch

Wenn Kinder mit solchen Programmen spielen, lernen sie negative Zahlen und deren Gesetze als nützlich kennen. Das ist die Nutzung als Lernprinzip. Aber nebenbei wird auch etwas über Algorithmen gelernt und sogar etwas für den Aufbau eines mathematischen Weltbildes getan. Das geschieht aber nur, weil die verwendete Technologie offen ist in dem Sinne, dass ihre algorithmischen Prinzipien den Lernenden zugänglich sind. Würde man nur ein Youtube-Video über negative Zahlen anschauen, wäre das nicht möglich.

Weber (2016) hat detailliert untersucht, wie ein algorithmisches Verständnis des Logarithmus entwickelt werden kann und wie leistungsfähig es ist.

Kernidee dabei ist, die Analogie zum Dividieren zu nutzen: So wie die Division die Frage beantwortet, wie oft man eine Zahl von einer anderen abziehen kann, bevor man unter 0 kommt, so beantwortet der Logarithmus die Frage, wie oft man dividieren kann, bevor man unter 1 landet. Ein Algorithmus dafür lässt sich sehr schnell implementieren (etwas trickreicher ist nur die Frage, wie man das Verfahren so erweitern kann, dass das Ergebnis auch gebrochen sein kann. Die entscheidende Erkenntnis an dieser Stelle ist, dass das algorithmische Vorgehen Grundvorstellungen zum Logarithmus vermittelt. Beispielsweise ist in dieser Sichtweise die Regel $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ völlig selbstverständlich, sie ergibt sich unmittelbar aus der Reflexion des Algorithmus.

Auch hier gilt: Der Computer, auf dem man den Logarithmus-Algorithmus zunächst implementiert, wird im Sinne des Lernprinzips genutzt, um „reine Mathematik“ zu lernen. Aber auch hier erschließt sich gleich mehr von der Welt: Wie viel Speicherplatz benötigen Zahlen im Computer, wie schnell klingt radioaktive Strahlung ab? Das muss man nicht mit dem Logarithmus des Taschenrechners als Blackbox berechnen, sondern kann sich dem schrittweise nähern.

Digitale Welt verstehen

Im vorherigen Abschnitt stand das Lernprinzip im Zentrum, aber die Beispiele haben gezeigt, dass man von da auch gleich beim Lernstoff ist. Dieses Begriffspaar sollte nur der Analyse dienen, in guten realen Lernprozessen sollte beides verwoben sein – und wenn nicht wage ich prophylaktisch den Vorwurf der Einseitigkeit. In diesem Abschnitt wird die andere Sichtweise eingenommen: Ausgehend von Fragen des Lernstoffs zur Digitalisierung wird gezeigt, dass die Verwendung als Lernprinzip nahe liegt.

Kortenkamp (2011) hat an einem schönen Beispiel gezeigt, dass die Digitalisierung bis in (fein beobachtete) Alltagsphänomene ausstrahlt: Bei der Umrechnung von Joghurtpreisen auf die 100g-Preise, die zu Vergleichszwecken in Supermärkten angegeben werden müssen, kann man zunächst willkürlich erscheinende Auf- und Abrundungen beobachten. Diese lassen sich aber erklären, wenn man weiß, dass Dezimalzahlen im Computer (üblicherweise) im Binärsystem gespeichert werden. In diesem System ist etwa schon 0,20€ nur durch einen periodischen Binärbruch darstellbar und entsprechend kommt es zu Rundungseffekten. Mit dieser Einsicht versteht man die Welt ein bisschen besser. Eine ähnliche Zielsetzung verfolge ich mit den Applets zu Tönen, Bildern und Videos (Oldenburg 2005, 2014, 2018): Digitale Bildverarbeitung ist omnipräsent, aber die dahinterliegende Mathematik wird in der Regel nicht bewusst gemacht. Die Beschäftigung damit führt aber einerseits zu einem genaueren Verständnis der Arbeitsweisen von Bildverarbeitungsprogrammen und damit zur besseren Einschätzung, welche Manipulationen damit möglich sind, und anderseits führt es zu einem erweiterten Übungsfeld für Terme. Das Gleiche trifft auf Töne und Videos zu.

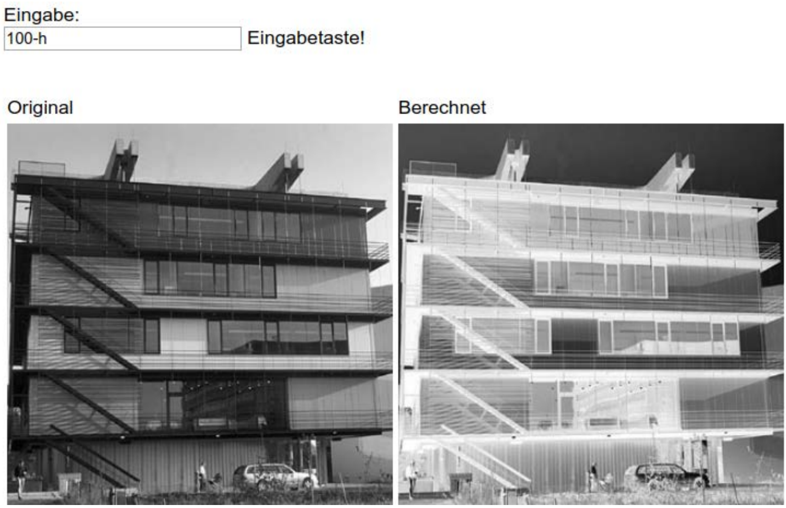


Abb. 8: Bildverarbeitung mit Termen

Weitere Anwendungsgebiete (einige davon werden in Oldenburg 2011 elementar behandelt):

- Autokorrektur: Wenn ein Nutzer auf dem Smartphone tippt: G r ü. Was soll das Smartphone vorschlagen? Das hängt vom Wort davor ab: „Rote“ oder „Viele“ lassen verschiedene Vervollständigungen plausibel erscheinen. Das mathematische Konzept dazu sind bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Bayes-Statistik. Weitere Anwendungen sind lernende SPAM-Filter und intelligente Postfächer.
- Optimierung: Sowohl diskrete als auch kontinuierliche Optimierungsprobleme gibt es wie Sand am Meer und digitale Tools können die meisten erstaunlich gut lösen – und oft mit sehr elementaren Algorithmen. Auch Regressionsrechnungen und darauf basierend Prognosen für die Entwicklung von Prozessen fallen in diesen Bereich.
- Clusteranalysen: Euklidischer Abstand oder Korrelation sind zwei einfache Abstandsmaße und kombiniert mit einfachen Algorithmen lassen sich Datenpunkte in Gruppen einteilen, die zueinander ähnlich sind. Das ist von der Werbung bis zur Theoriebildung wichtig. Weiter gedacht führt elementare Mathematik in das Gebiet des data mining (Segaran 2008).
- Künstliche Intelligenz: Das Trainieren eines Neuronalen Netzes läuft letztlich auf das Anpassen von bestimmten Gewichtungsfaktoren hinaus, so dass das Netz bei Trainingsdaten möglichst genau das liefert, was es liefern soll.
- Computeralgebra und automatisches Beweisen: Formalisierte Aussagen lassen sich maschinell umformen und so viele Bereiche der Mathematik und darüber hinaus trivialisieren.

Mit all diesen Beispielen kann gleichzeitig Aufklärung über die digitale Welt betrieben werden (und diese kann besser durchschaut werden, was Grundlage dafür ist, diese Welt selbst weiter zu verändern und kritisch zu begleiten) und mathematische Konzepte können sich an ihnen weiterentwickeln. Indem diese beiden Säulen reflektierend integriert werden, wird man auch dem Anspruch der dritten Säule gerecht, der Medienerziehung im Sinne Hischers oder der Digitalisierung als Lernziel im Sinne Winters.

Diskussion

Dieser Aufsatz konnte nur ein paar Ideen für eine Art Stoffdidaktik der Mathematik in und für die digitale Welt skizzieren. Es ist aber meine feste Überzeugung, dass Mediennutzung alleine nicht ausreicht und viel mehr in diese Richtung getan werden müsste, um die wahre Macht der digitalen Werkzeuge den Lernenden zu erschließen.

Literatur

Dörfler, W. (2016). Signs and their use: Peirce and Wittgenstein. In: Bikner-Ahsbas et al: Theories in and of Mathematics Education, Springer, Berlin.

Ekenstam, A., Greger, K. (1989). Programming and Understanding of Variables. *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (2), 99-121.

Förster, K. T. (2015). Scratch im Geometrieunterricht. *Mathematik lehren* Jg. 32, Nr. 188, 20-24.

Hamilton, E.R., Rosenberg, J.M. & Akcaoglu, M.: The Substitution Augmentation Modification Redefinition (SAMR) Model: a Critical Review and Suggestions for its Use. *TechTrends* (2016) 60.

Hischer, H. (Hrsg.) (1993). *Mathematikunterricht und Computer. Neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen?* Franzbecker, Hildesheim.

Hischer, H. (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien*. Franzbecker, Hildesheim.

Kortenkamp, U. (2011). Die etwas andere Vorlesung. In: Krohn, Th., Malitte, E., Richter, G., Richter, K., Schöneburg, S., Sommer, R.: Mathematik für alle. Festschrift für Wilfried Herget, Franzbecker, Hildesheim.

Noss, R. (1986). Constructing a conceptual framework for elementary algebra through Logo programming, *Educational Studies in Mathematics* 17 (4), 335-357.

Oldenburg, R. (2005). Funktionen, Sound und MuPAD. *MNU* 59(1), 16-18.

Oldenburg, R. (2011). *Mathematische Algorithmen im Unterricht*. Teubner, Wiesbaden.

Oldenburg, R. (2011). Reification and symbolization. In: Proceeding Koli Calling '11, 49-53.

Oldenburg, R. (2014). Funktionen haben viele Gesichter, auch Deins. *Mathematik lehren* 187, 50-51.

Oldenburg, R, (2017). Transparent Rule Based CAS to Support Formalization of Knowledge. *Mathematics in Computer Science,* Volume 11, Issue 3–4, pp 393–399.

Oldenburg, R. (2018). Die Mathematik der Bildverarbeitung. In: Siller, St., Greefrath, G., Blum, W. (2018): Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4. Springer, Berlin.

Puentedura, R. R. (2006). Transformation, technology, and Education. URL: http://www.hippasus.com/resources/tte/

Rahwan, I., Cebrian, M., Obradovich, N. et al. Machine behaviour. Nature 568, 477–486 (2019) doi:10.1038/s41586-019-1138-y

Scratch: www.scratch.mit.edu

Segaran, T. (2008). Kollektive Intelligenz. O'Reilly.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain (Eds), Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tall, D., Thomas, M. (1991). Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer, *Educational Studies in Mathematics,* 22(2), 125-147.

Weber, Ch. (2016). Making logarithms accessible – operational and structural basic models for logarithms.. *Journal für Mathematikdidaktik* 37, Suppl. 1, S69-S98.

Weigand, H.-G., Weth, Th. (2002). *Computer im Mathematikunterricht*. Spektrum, Heidelberg.

Weigend, M. (2007). Intuitive Modelle der Informatik. URL: http://ddi.cs.uni-potsdam.de/Examensarbeiten/Weigend2007.pdf

Winter, H. (1992). Sachrechnen in der Grundschule, Berlin.

Vodafone Stiftung, Deutscher Philologenverband (2019). „Deutscher Lehrerpreis 2019"in Berlin verliehen. URL: https://www.lehrerpreis.de/documents/2019-presse/2019_PM_NATIONAL_mit%20Zitaten.pdf.

Das Profilfach Informatik – Mathematik – Physik (IMP) Stellung, Genese und Ausgestaltungsmöglichkeiten

Thilo Höfer

Im Zuge der Neugestaltung der Bildungspläne in Baden-Württemberg im Jahr 2016 wurde ein neues Profilfach installiert. Dieses Profilfach setzt sich zu gleichen Anteilen aus den Fächern Informatik, Mathematik und Physik zusammen. Ziel des Faches ist es sowohl eigenständige als auch vernetzende Kompetenzen in diesen drei Fachanteilen aufzubauen. Der folgende Artikel zeigt zunächst auf, wie das Fach strukturell und inhaltlich generiert wurde und sich in den vorhandenen Fächerkanon einfügt. Ausgehend von den Inhalten des Faches Mathematik werden anschließend exemplarisch Möglichkeiten zur Ausgestaltung im Unterricht aufgezeigt.

Einleitung

Im Zuge der Neufassung der Bildungsstandards im Jahr 2016 wurden die Bildungsstandards für das Fach ITG (Informationstechnische Grundbildung) gestrichen. An ihre Stelle traten die Verankerung der Leitperspektive Medienbildung, sowie die Bildungsstandards für den Basiskurs Medienbildung in Klasse 5 und des Aufbaukurses Informatik in Klasse 7. Außerdem wurde der Auftrag erteilt, einen Bildungsplan für das neu zu erschaffende Profilfach IMP zu erstellen. Die folgenden Abschnitte zeigen den „Werdegang“ des gesamten Faches IMP, seine Stellung im Fächerkanon am allgemeinbildenden Gymnasium und exemplarische Ausgestaltungsmöglichkeiten ausgehend von den mathematischen Inhalten.

Stellung des Faches IMP im Fächerkanon

Das Fach IMP ist ein sowohl an den Gemeinschaftsschulen als auch an den allgemeinbildenden Gymnasien wählbares Profilfach. Im gymnasialen Bereich wird es somit in den Klassen 8 bis 10 als Kernfach unterrichtet. Dies zeigt Abbildung 1 auf, die einen Überblick über den Fächerkanon für das achtjährige Gymnasium darstellt. Der Unterricht in IMP findet wöchentlich vierstündig statt. Alle Schülerinnen und Schüler der allgemeinbildenden Gymnasien müssen für die Klassen 8 bis 10 ein Profilfach wählen. Dabei steht das Profilfach IMP nun als eine weitere Möglichkeit neben dem sprachlichen Profil (dritte Fremdsprache), dem naturwissenschaftlichen Profil mit dem Fach/Fächerverbund Naturwissenschaft und Technik und den Profilen der Fächer Sport, Musik und Bildende Kunst bereit. Allerdings bietet nicht jedes Gymnasium alle Profile an. Vielmehr ist die Auswahl, die ein Gymnasium anbietet, Teil der regionalen Schulentwicklung, die die Schulen gemeinsam mit den Schulträgern in Absprache mit den Nachbarkommunen und den Regierungspräsidien durchführen – mit dem Ziel, dass regional keine zu großen Häufungen oder ein Mangel an Angeboten entsteht. Üblicherweise bietet jedes Gymnasium mindestens zwei Profilfächer an. Dabei gehören ein sprachliches Profil und das naturwissenschaftliche Profil mit dem Fach NWT (Naturwissenschaft und Technik) momentan zum Standard.

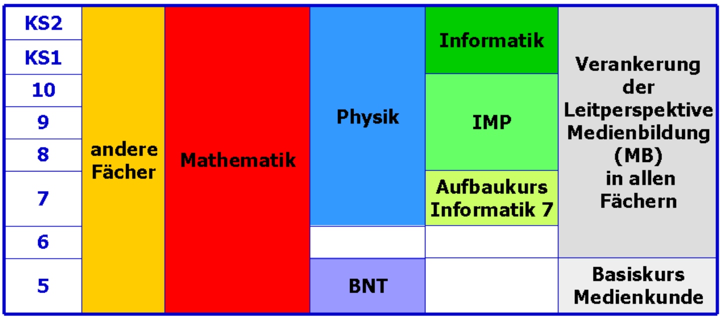


Abb. 1: Fächerkanon am allgemeinbildenden Gymnasium (G8)
Autor: Matthias Makowsky (unter CCby-3.0-Lizenz)

Das Profilfach IMP setzt sich aus den drei Fächern Informatik, Mathematik und Physik zusammen und ist in deren „Basisfächern" so eingebettet, dass es zwar Inhalte aus diesen Fächern aufgreift, sie aber inhaltlich nicht unterstützt. Dadurch wird gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler des Profilfachs IMP keinen signifikanten inhaltlichen Vorteil gegenüber ihren Mitschülerinnen und Mitschülern aus anderen Profilbereichen haben. Das „Basisfach" Mathematik wird dabei in allen Klassenstufen vierstündig unterrichtet und baut somit Inhalte zeitlich parallel zum Profilfach IMP auf. Ebenso geschieht dies durch das Fach Physik, das in Klasse 7 beginnt und dann durchgängig bis einschließlich Klasse 10 mit zwei Wochenstunden unterrichtet wird. Das Fach Informatik hingegen findet im Unterricht aller

Schülerinnen und Schüler nur in der Klassenstufe 7 statt und ist somit zu Beginn des Profilfaches IMP in Klassenstufe 8 inhaltlich bereits abgeschlossen.

Für die Kursstufe können die Schülerinnen und Schüler – im Gegensatz zu anderen Profilen – kein Leistungs- oder Basisfach IMP wählen. Zur Vertiefung steht hier nur die Wahl eines (oder maximal zwei) der Einzelfächer Informatik, Mathematik oder Physik bereit. Diese können von den Schulen sowohl dreistündig als Basisfächer als auch fünfstündig als Leistungsfächer angeboten werden. Eine Besonderheit des Faches Informatik ist die Möglichkeit des zweistündigen Brückenkurses in Klasse 10 für alle Schülerinnen und Schüler, die nicht das Profil IMP besuchen. Mithilfe des Brückenkurses wird die Wahl eines dreistündigen oder fünfstündigen Informatikkurses für diese Schülergruppe ermöglicht. Für das Fach Informatik können aber auch zweistündige Wahlfächer angeboten werden (diese können jedoch nicht in eine Abiturprüfung münden), die auch von Schülerinnen und Schülern außerhalb des IMP-Profils ohne weitere Kursbelegung gewählt werden können.

Unabhängig von der Profilwahl sind die Kompetenzen der Leitperspektive Medienbildung mithilfe aller Fächer und dem sogenannten Basiskurs Medienbildung in Klasse 5 auszubilden. Die Bedienung der klassischen Medienanwendungen wie Textverarbeitung, Tabellenkalkulation und Präsentationsprogramm obliegt somit allen Fächern und ist kein expliziter Inhalt der Fächer Informatik oder IMP.

Genese des Faches IMP und seines Bildungsplans

Der Auftrag zur Erstellung des Bildungsplans wurde bis zur Anhörungsfassung und der Beschließung im Jahr 2018 umgesetzt, woraufhin der Unterricht im Fach IMP im September 2018 an über 60 Gymnasien startete. Ein Jahr später folgten über 30 weitere Gymnasien und auch für Gemeinschaftsschulen ist es seit dem Schuljahr 2019/2020möglich, das Fach IMP anzubieten. Parallel dazu wurde ein berufsbegleitender

Studiengang an der Universität Konstanz angeboten, um Lehrer dazu zu befähigen, den Informatik-Teil in IMP zu unterrichten.

Der inhaltliche Auftrag an die Bildungsplankommission war vielseitig. So sollte es sich bei der Ausgestaltung nicht um einen Fächerverbund handeln, sondern um drei eigenständige Fachanteile. In diesen Fachanteilen sollten sowohl vernetzende Aspekte als auch facheigenständige Inhalte umgesetzt werden, wobei die Vernetzung hauptsächlich mit Blick auf das Fach Informatik ausgelegt werden sollte. Aufgrund des Status eines Kernfaches stehen für das Fach IMP in drei Schuljahren (die Klassenstufen 8, 9 und 10) jeweils vier Stunden Unterricht pro Woche zur Verfügung. Die Umsetzung erfolgt so, dass jedes Fach in zwei Jahren einstündig und in einem Jahr zweistündig vorgesehen ist, und zwar Informatik in Klassenstufe 8, Physik in 9 und Mathematik in 10. Dabei sollte es auch ermöglicht werden, die einstündigen Fachanteile modular zu unterrichten, beispielsweise doppelstündiger Unterricht im ersten Halbjahr der Klassenstufe 8 in Mathematik und im zweiten Halbjahr dieser Klassenstufe in Physik, bei durchgehend doppelstündigem Unterricht in Informatik. Diese Anforderung hatte direkte Auswirkung auf die Ausgestaltung der Bildungsstandards: Der übliche Rahmen des Bildungsplanes die inhaltlichen Kompetenzen der Schulfächer über zwei Schuljahre zu formulieren musste verlassen werden, damit beispielsweise die für die Informatik in Klassenstufe 9 benötigten mathematischen Inhalte bereits sicher im Mathematik-Teil unterrichtet wurden. Dies wurde durch die jahrgenaue Ausgestaltung aller drei Fachanteile umgesetzt.

Mit Blick auf diese Vorgaben wurden die Fachanteile in der Bildungsplankommission folgerichtig durch jeweilige Fachvertreter betreut. Diese stimmten sich in gemeinsamen Sitzungen über die generelle Ausrichtung und die vernetzenden Inhalte ab. Ein wichtiger gemeinsamer Punkt war dabei die Ausgestaltung jeweiliger „roter Fäden“. So erhielten alle drei Fachanteile inhaltliche Stränge, die sich über die drei Jahre fortgesetzt entwickeln (zum Beispiel „Daten und Codierung“ in Informatik, „Kryptologie“ in Mathematik, sowie „Erde und Weltall“ in Physik).

Der Mathematik-Bildungsplan im Fach IMP setzt sich deshalb aus vier Teilbereichen zusammen, von denen nur der Bereich „Funktionen im Sachkontext“ die Inhalte nicht fortgesetzt aufeinander aufbaut. Die drei Bereiche „Kryptologie“, „Aussagenlogik und Graphen“ sowie „Geometrie“ entwickeln demgegenüber also ein inhaltlich aufeinander aufbauendes mathematisches Wissen (s. Abb. 2).

	Klasse 8	Klasse 9	Klasse 10
Kryptologie	Stellenwertsysteme Teilbarkeiten Primfaktoren Euklidischer Alg.	Modulo-Operation: Einführung und Anwendung bei Codierungen	Modulo-Rechenregeln Verschlüsselung mit Modulo-Operation Einweg-Eigenschaften RSA-Verfahren
Aussagen-logik / Graphen	Einführung Graphentheorie Lösungsstrategien	Wahrheitstafeln: Math. Grundbegriffe Logikrätsel lösen	Fortsetzung Wahrheitstafeln DeMorgansche Regeln Erste Grundlagen der Zahlentheorie
Geometrie	Satz und Kehrsatz Erläutern und Begründen	Fortsetzung aus 8: Entdecken und Begründen	Ellipse, Parabel, Hyperbel als Ortslinien und als Kegelschnitte
Funktionen	---	Abschnittsweise definierte lineare Funktionen Triangulierungen	Folgen, diskrete Wachstumsvorgänge Parameterdarstellung von 2-D-Kurven, einfache Zykloide

Abb. 2: Auszüge aus den Inhalten der vier Teilstränge im Fachanteil M

Beispiele zur Ausgestaltung ausgehend vom Fachanteil Mathematik

Bereits seit dem Jahr 2018 wurde vom Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg eine zentrale Projektgruppe (ZPG) beauftragt Unterrichtskonzeptionen zu entwickeln, die in landesweiten Fortbildungen als Musterbeispiele vorgestellt und auf dem Landesfortbildungsserver *lehrerfortbildung-bw.de* bereitgestellt werden. Die hier folgenden Beispiele aus diesen Unterrichtskonzeptionen zur Ausgestaltung der mathematischen Fachanteile zeigen insbesondere die Möglichkeiten auf, wie eine Vernetzung mit den Inhalten des Faches Informatik konkret aussehen kann.

Die mathematischen Inhalte im Fach IMP wurden so beschrieben, dass sie nicht mit den aktuellen Inhalten des Faches Mathematik verknüpft sind. Es gibt jedoch Inhalte des Faches Mathematik, auf die in IMP zeitlich verzögert zugegriffen wird. So sind beispielsweise grundlegende Kenntnisse über Primzahlen Gegenstand des Mathematikunterrichts in Klassenstufe 5/6, auf die in IMP im Bereich der Kryptologie ab Klassenstufe 8 zurückgegriffen werden. Durch den zeitlichen Versatz von mindestens zwei Jahren entsteht dazu ein sicherlich von der jeweiligen Klassenzusammensetzung abhängiges Vorwissen. Die Unterrichtskonzeption der ZPG sieht deshalb vor, dass die zentralen Inhalte zu Primzahlen erneut aufgegriffen werden. Für den Fall, dass diese Inhalte bei den Schülerinnen und Schülern bereits gefestigt vorhanden sind, entsteht ein zeitlicher Freiraum, der für fächervernetzende Kurzprojekte verwendet werden kann. So ist im Beispiel der Primzahlen daran gedacht, dass die Schülerinnen und Schüler eine App programmieren, mit der sich das Verfahren „Sieb des Eratosthenes“ veranschaulichen lässt (siehe Abb. 3).

Abb. 3: App zum Sieb des Eratosthenes, programmiert mit dem MIT-App-Inventor

Neben den innermathematischen Bezügen wurde stets auch Wert darauf gelegt, den Bezug zu den benachbarten Fächerteilen Informatik und Physik zu ermöglichen. Als gutes Beispiel für die Umsetzung dessen dient hier die Einheit zu „Funktionen im Sachkontext“ aus Klassenstufe 9. Ziel dieser Einheit ist es, die Grundzüge einer computergestützten bildgebenden Erfassung und Modellierung von Objekten zu durchdringen. Mathematisch werden hierzu zunächst abschnittsweise definierte lineare Funktionen behandelt, um die bei einer Objekterfassung generierten Stützpunkte interpolieren zu können. Des Weiteren wird die Objekterfassung mithilfe einer einfachen Schrittweitensteuerung realisiert. Diese Grundlagen werden dann von den Schülerinnen und Schülern in Scratch implementiert mit dem Ziel, ein Schattenbild nach geeigneten Stützpunkten abzutasten und diese anschließend zu interpolieren (vgl. Abb. 4).

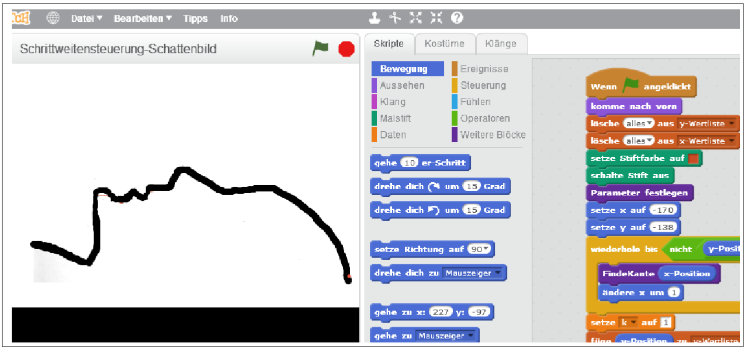


Abb. 4: Erfassung des Schattenbildes eines Schülers mithilfe einer in Scratch programmierten Schrittweitensteuerung

Schließlich kann das so entstandene Objekt auch noch animiert werden - hierzu eignet sich die Übertragung der aus Scratch erhaltenen Stützpunkte in Geogebra (s. Abb. 5).

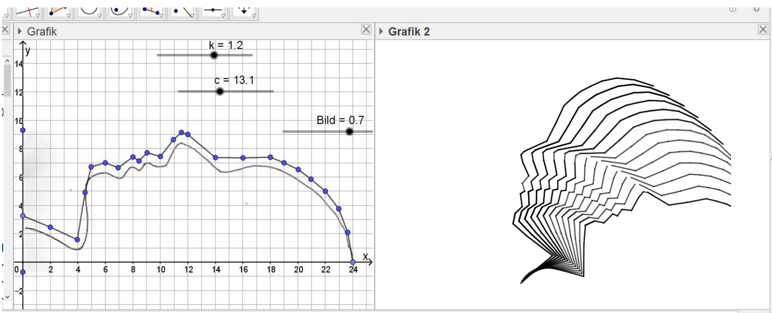


Abb. 5: Übertragung der Stützpunkte, lineare Interpolation und Animation.

Ausblick

Die Arbeit der zentralen Projektgruppe zur didaktischen Umsetzung und Ausgestaltung der im Bildungsplan geforderten Inhalte ist Stand Oktober 2019 noch nicht abgeschlossen. Innerhalb des nächsten Jahres werden weitere ausgearbeitete Unterrichtsmodule veröffentlicht. Die Materialien für die Klassenstufe 9 sind bereits in der Endredaktion, danach beginnt die Arbeit an den Modulen für Klassenstufe 10. Alle bislang veröffentlichten Module sind frei zugänglich unter der Internetadresse

https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/imp/gym/bp2016.

Literatur

Grund, O., Höfer, Th. (2018). Unterrichtsmaterialien für das Fach IMP – Fachanteile Mathematik. https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/imp/gym/bp2016

Ministerium für Kultus und Unterricht Baden-Württemberg (2018). Bildungsplan 2016 – Informatik, Mathematik, Physik (IMP). Villingen-Schwengingen: Neckar-Verlag.

Es geht auch ohne YouTube
Aktivierung in Mathematikvorlesungen durch interaktive Erklärvideos

Marco Böhm, Peter Ferdinand, Regula Krapf

Es wird ein Projekt an der Universität Koblenz-Landau vorgestellt, welches eine Aktivierung von Lehramtsstudierenden in Großveranstaltungen der Studieneingangsphase im Fach Mathematik erzielen soll. Dazu werden im Rahmen einer Vorlesung Videos in Kombination mit einem Audience Response System (ARS) medien- und fachdidaktisch begründet eingesetzt. Die Videos sollen dabei mathematische Inhalte anhand alltagsnaher Beispiele illustrieren. Es werden das Konzept anhand eines Beispielvideos zum Thema Funktionseigenschaften erläutert und erste Evaluationsergebnisse präsentiert.

Einleitung

Ergänzend zu Fachliteratur nutzen viele Studierende Videos, um sich Studieninhalte zu veranschaulichen. Hierzu werden beispielsweise die Videoplattformen YouTube oder Khan Academy genutzt (Bischof & Mehner, 2015). Beispielsweise hat Daniel Jung, der Lernvideos zu überwiegend schulischen Themen der Mathematik auf YouTube bereitstellt, rund 583.000 Abonnenten. Inhalte aus solchen Quellen lassen sich jedoch in der Regel nicht in die eigene Lehrveranstaltung übertragen, da deren Konzeption fachdidaktische Überlegungen in der Regel vermissen lassen. Darüber hinaus lassen sich diese meistens nicht bearbeiten und somit nicht auf die speziellen Gegebenheiten und Anforderungen einer spezifischen Lehrveranstaltung anpassen (Handke & Schäfer, 2012).

Auch im Bereich der Hochschulmathematik werden Videos von Studierenden im Selbststudium immer häufiger herangezogen. Lehrende setzen zudem vermehrt auf video-basierte Lehrmethoden, wie beispielsweise das Modell des „Inverted Classroom“, welches die Vermittlung theoretischen Wissens durch Videos vorsieht, die zu Hause als Vorbereitung für die Vorlesung durchgearbeitet werden sollen. So bleibt in der Präsenzveranstaltung viel Zeit für eine aktive Auseinandersetzung mit Lehrinhalten, insbesondere zur Vertiefung und Anwendung der Theorie, sowie zur

Klärung von Unklarheiten übrig und es findet eine intensivere Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden statt (Spannagel, 2013).

Das Konzept des Inverted Classroom birgt jedoch auch Nachteile: So erfordert sie ein hohes Maß an Selbstdisziplin (Fischer & Spannagel, 2012), was, insbesondere in der Studieneingangsphase, die ohnehin schon im Vergleich zur Schule ausgeprägtere Rolle des selbstregulierten Lernens zunehmend verstärkt (Strayer, 2012). Im Rahmen der Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“, welche überwiegend von Lehramtsstudierenden mit Fach Mathematik aller Zielschularten im ersten Semester belegt wird, wird seit dem Wintersemester 2018/19 daher ein neuartiger Ansatz verfolgt, welcher didaktisch aufbereitete Erklärvideos in die Vorlesung integriert und in Kombination mit einem Audience Response System (ARS) zu einer Aktivierung der Studierenden beitragen soll, ohne die Theorievermittlung von der Präsenzveranstaltung aufs Selbststudium auszulagern.

Konzeption

Bei der Gestaltung des neuen Formats wurden die Planungsschritte der gestaltungsorientierten Mediendidaktik nach Kerres (2008) verfolgt. Demnach wurde ein Bildungsanliegen in den Mittelpunkt gestellt, sodass nicht das Medium selbst das Ziel darstellt und ein Mehrwert zu bestehenden Lösungen erreicht wird. Das didaktische Konzept wurde hierbei aus der Lernsituation abgeleitet, welche ebenfalls die Gestaltung des Videos beeinflusst hat. Die mit der Konzeption angestrebten Ziele bestehen einerseits darin, den Studierenden ein Lernmedium für bestimmte Inhalte bereitzustellen, auf welches auch außerhalb der Lehrveranstaltung und insbesondere bei der Klausurvorbereitung zugegriffen werden kann. Andererseits soll die Zielgruppe in der Vorlesung stärker aktiviert sowie die Interaktion unter den Studierenden gefördert werden. Da sich die Zielgruppe primär aus Studierenden im ersten Fachsemester zusammensetzt, wird nicht ein Ersatz für die Präsenzveranstaltung wie beispielsweise beim Inverted Classroom vorgesehen, sondern eine bereichernde, propädeutische Ergänzung angestrebt. Dabei sollen vor allem fachmathematische Begrifflichkeiten, welche üblicherweise im ersten Semester zu Verständnisschwierigkeiten führen, anschaulich und alltagsnah eingeführt werden. Bei der mathematischen Begriffsbildung unterscheiden Vinner & Tall (1981) zwischen Concept Definition und Concept Image. Bei ersterem handelt es sich um eine verbale Formulierung einer Begriffsdefinition, während zweitere alle individuellen Vorstellungen, insbesondere Beispiele, Visualisierungen oder Eigenschaften eines Begriffs umfasst. Die Vermittlung theoretischen Wissens durch ein Video, welches verschiedene Repräsentationen mit Audiounterstützung kombiniert, ermöglicht dabei eine geeignete Verknüpfung von Concept Definition und Concept Image bei der Einführung mathematischer Begriffe. Ein weiterer Mehrwert des Videoeinsatzes in Lehrveranstaltungen stellt eine Auflockerung und die damit einhergehende Steigerung der Aufmerksamkeit bei den Studierenden dar.

Ein Nachteil vom Videoeinsatz stellt der sogenannte „Berieselungseffekt“ dar, welcher den rein passiven Videokonsum bei fehlender Interaktion beschreibt. Wachtler & Ebner (2014) beschreiben verschiedene Möglichkeiten, wie Videos interaktiv gestaltet werden können. Bei online zur Verfügung gestellten Videos bieten sich vor allem automatisch oder vom Zuschauenden ausgelöste Interaktionsformen an, wie beispielsweise Multiple-Choice-Fragen, welche während des Videokonsums beantwortet werden müssen oder können, bevor das Video fortgesetzt wird. Bei Live-Übertragungen bieten sich vom Vortragenden ausgelöste Interaktionsformen an, wie beispielsweise der Einsatz von ARS, welche Online-Umfragen mit direkt abrufbaren Ergebnissen ermöglicht.

ARS eignen sich zur kognitiven Aktivierung von großen Lerngruppen, indem die Aufmerksamkeit durch die Unterbrechung des Informationsflusses an geeigneten Stellen lernfördernd gesteuert wird. Ebenso kann Feedback generiert werden, sodass einerseits Studierenden die eigenen Lernleistungen einschätzen und andererseits die Lehre der Lehrenden bewertet werden kann. So können bei Bedarf Maßnahmen zur Optimierung der Lehrveranstaltung vorgenommen werden. Ebenfalls können die Lernstandskontrollen einen motivierenden Effekt bei den Lernenden erzeugen, insbesondere bei angemessener Beachtung der Umfrageergebnisse, wobei das Resultat als Standortbestimmung zu verstehen ist (Erlemann, Johner & Werder 2014 und Witt & Strüver 2012). Die Ergebnisse des ARS-Einsatz können nach dem Konzept der Peer Instruction als Grundlage für Diskussionen der Studierenden untereinander genutzt werden. Diese Methode sieht eine erste Abfrage mittels ARS vor, gefolgt von einer Diskussion in Kleingruppen benachbarter Studierender, welche sich gegenseitig von ihrer gewählten Lösung überzeugen sollen. Anschließend erfolgt eine zweite Abstimmung mittels ARS, in welcher sich im Idealfall die korrekte Antwort durchsetzt. Eine fruchtbare Gruppendiskussion bedingt dabei eine Erfolgsquote von 30% bis 70% bei der ersten Abfrage. Bei weniger als 30% ist jedoch eine erneute Erarbeitung der Inhalte zu empfehlen, bei über 70% kann direkt die Auflösung des korrekten Ergebnisses erfolgen (Mazur, 2006 und Duncan & Mazur, 2005). Bei der Durchführung von ARS-Abstimmungen kommt es in der Regel bei einigen Studierenden zu technischen Schwierigkeiten. Solange es sich hierbei um Einzelfälle handelt, sollten diese erst zu gegebener Zeit ausgeräumt werden, damit das Lerngeschehen nicht unterbrochen wird. Die nicht partizipierenden Studierenden profitieren trotzdem von der Diskussion über die Inhalte (Mazur 2006, Witt & Strüver 2012 und Erlemann et al., 2014). Die Methode der Peer Instruction wurde von Bauer (2019) auch in mathematischen Lehrveranstaltungen, insbesondere im Übungsbetrieb, erfolgreich implementiert.

Die Länge von Erklärvideos wirkt sich nach Guo et. Al. (2014) maßgeblich auf die Zeit aus, die sich die Studierenden damit beschäftigen. Bei Videos einer Länge zwischen drei und sechs Minuten ist der Median der Beschäftigungszeit mit dem Video am höchsten. Für die Sprechgeschwindigkeit empfehlen sie 160 Wörter pro Minute (WpM) in englischer Sprache. Die Sprechgeschwindigkeit sollte gemäß Weidenmann (2009) im Deutschen jedoch darunterliegen, nämlich bei 120 bis 150 WpM. Die Übersichtlichkeit der Darstellungen erhält einen hohen Stellenwert, sodass der Inhalt bereits beim erstmaligen Betrachten verständlich ist). Aus Sicht der Studierenden sind darüber hinaus formale Kriterien, wie Darstellung, Professionalität und Länge grundsätzlich relevanter als inhaltliche Kriterien. Beim Inhalt sind der Informationsumfang, die Thematik und die Verständlichkeit von größter Bedeutung. Ebenfalls relevant wurde ein Bezug zur Lebenswelt als bedeutsam angesehen. Videos werden dabei im Vergleich mit Lehrbüchern tendenziell als weniger vertrauenswürdig eingestuft, wobei hier der formale Ausgestaltungsgrad ein entscheidender Faktor ist (Bischof & Mehner, 2015).

Pilotierung

Als erstes Beispiel für den Einsatz eines interaktiven Erklärvideos wurde das Thema Funktionseigenschaften gewählt, welches erfahrungsgemäß in Klausuren zur „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt" besonders häufig zu Verständnisproblemen führt. Das Video ist dabei so konzipiert, dass es sich als ersten Einstieg in das entsprechende Thema eignet. Um einen Lebensweltbezug für die Studierenden herzustellen, wurde das Thema Klausuren im Lehramtsstudium gewählt. Im ersten Beispiel wird zunächst im Kontext der elektronischen Prüfungsanmeldung durch die eindeutige Zuordnung von E-Mail-Adressen zu Studierenden der Begriff „injektiv" veranschaulicht und definiert (siehe Abb. 1) sowie exemplarisch verifiziert. Entsprechend wird der Begriff der Surjektivität eingeführt und als Gegenbeispiel eine institutionelle E-Mail-Adresse gewählt, welche kein Urbild besitzt. Ein weiteres Beispiel soll erläutern, wie sich Injektivität einer Funktion durch Angabe eines Gegenbeispiels widerlegen lässt. Visualisieren lässt sich dies, indem zwei Elemente im Pfeildiagramm demselben Bild zugeordnet werden. Abbildung 2 zeigt die Auflösung bezüglich der Injektivität. Bevor jedoch die Auflösung präsentiert wird, erfolgt eine ARS-Abstimmung mit dem an der Universität Paderborn entwickelten, web-basierten System PINGO. Die Studierenden wurden aufgefordert, die Funktion auf Injektivität und Surjektivität zu überprüfen.

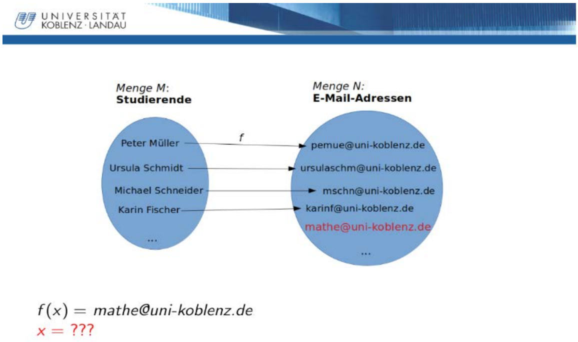


Abb. 1: Auszug aus dem Video (Nach der Definition der Funktionseigenschaften „injektiv“ und „surjektiv“ erfolgt die Erläuterung eines injektiven und nicht surjektiven Beispiels anhand der Funktion Studierende $\mapsto$ E-Mail-Adressen[1]

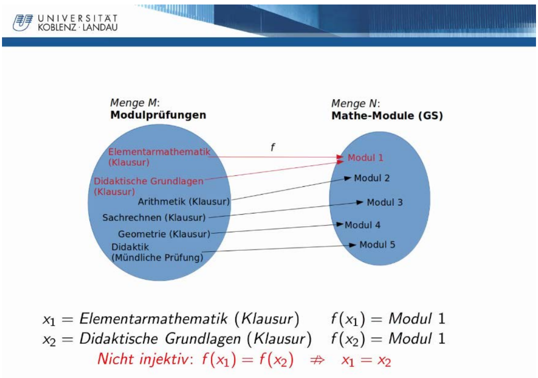


Abb. 2: Auszug aus dem Video (Beispiel einer nicht-injektiven Funktion)[2]

---

1 Sprechertext gemäß Drehbuch: „[…] Zu diesem f(x) existiert jedoch kein x aus der Menge der Studierenden. […]“

2 Sprechertext gemäß Drehbuch: „Das Bild von x_1, Elementarmathematik, und von x_2, Didaktische Grundlagen, ist jeweils Modul 1. Aus der Gleichheit der Bilder folgt jedoch nicht, dass x_1 gleich x_2 ist. Die Funktion ist daher nicht injektiv.“

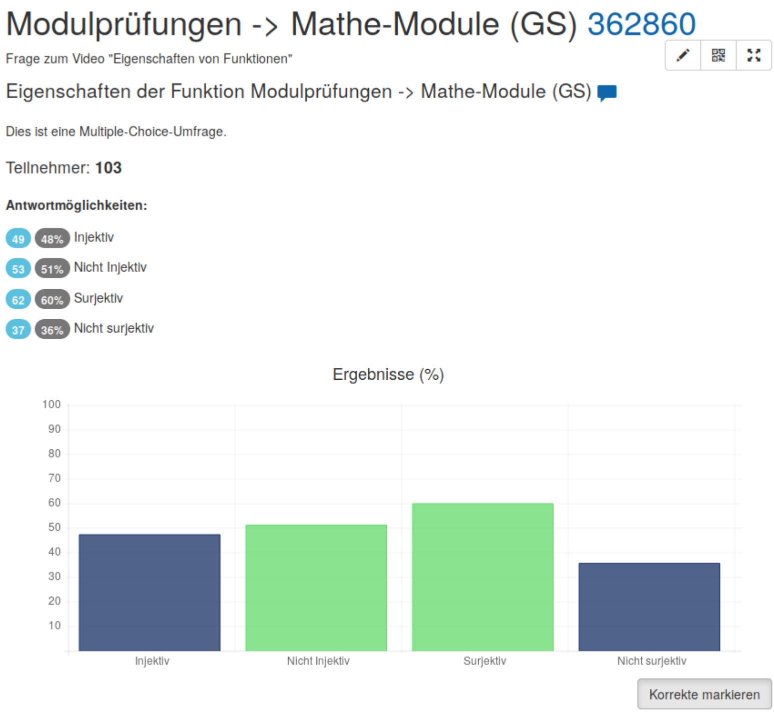


Abb. 3: Ergebnisse der PINGO-Abfragen bei der ersten Pilotierung

Im ersten Piloteinsatz im Wintersemester 2018/19 wählten hier 51% (“nicht injektiv”) resp. 60% (“surjektiv”) die korrekten Lösungen. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 illustriert. Auf den Einsatz von Peer Instruction wurde zunächst verzichtet und das Video mit der Auflösung der Frage fortgesetzt. Im dritten und letzten Beispiel erfolgte eine Zuordnung von Studierenden, die eine Prüfung mitgeschrieben haben, zu Matrikelnummern auf den Klausurbögen. Hier wurde die Frage nach den Funktionseigenschaften mit 94% (“injektiv”) bzw. 77% (“surjektiv”) korrekt beantwortet. Dabei haben 103 von 141 anwesenden Studierenden bei der PINGO-Abstimmung teilgenommen. Abschließend wird im Video anhand des letzten Beispiels der Begriff „bijektiv” definiert. Im Anschluss an den Videoeinsatz werden die Begriffe vertieft und mit weiterführenden Beispielen aus der Mathematik angereichert und in der entsprechenden Übungsstunde thematisiert. Damit das Video auch zu einem späteren Zeitpunkt abgerufen werden kann, wurde es im Anschluss an die Vorlesung mittels der Videoplattform Panopto auf der E-Learning Plattform OpenOlat der rheinland-pfälzischen Hochschulen zur Verfügung gestellt.

Evaluationsergebnisse

Um die vorliegende Lehrinnovation zu evaluieren, wurde an zwei Terminen T1 und T2 im Anschluss an den Videoeinsatz eine Umfrage unter den Vorlesungsteilnehmern durchgeführt. Dabei galt es das Nutzungsverhalten der Studierenden von Erklärvideos im Rahmen des Studiums zu ermitteln, das gezeigte Video und die dazugehörige PINGO-Umfrage zum Thema Funktionseigenschaften zu beurteilen sowie die Auswirkung des Videoeinsatzes auf Aufmerksamkeit, Interesse und Motivation einzuschätzen. Die erste Befragung T1 fand im Wintersemester 2018/19 während der Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“, welche jedes Semester angeboten wird, unter 141 Lehramtsstudierenden mit Zielschularten Grundschule, Realschule plus und Gymnasium statt. Eine zweite Evaluierung T2 wurde in derselben Vorlesung im Sommersemester 2019 mit neuen Studierenden durchgeführt.

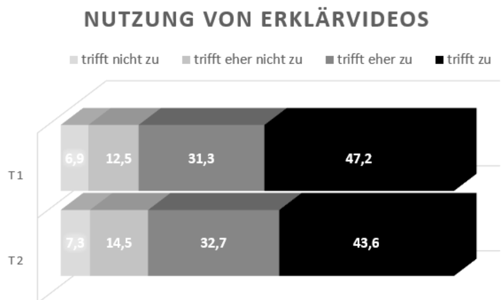


Abb. 4: Nutzung von Erklärvideos im Mathematikstudium in Prozentangaben

An beiden Terminen gab eine überwältigende Mehrheit der Studierenden an, Erklärvideos aus dem Internet im Rahmen ihres Mathematikstudiums regelmäßig zu nutzen (siehe Abb. 4). Eine Beurteilung der Qualität des Videos ergab am ersten Termin, dass die Sprechgeschwindigkeit deutlich zu hoch war. Diese wurde für die zweite Pilotierung reduziert und es wurden geringfügige inhaltliche Änderungen vorgenommen. Die Evaluierung im zweiten Durchgang ergab, dass dennoch 80% der Studierenden das Sprechtempo für zu hoch hielt. Die inhaltliche Nachvollziehbarkeit der im Video vorgestellten Begriffe (88,5% bzw. 93,6%), sowie die Verständlichkeit der gewählten Beispiele (91,1% bzw. 100%) wurde an beiden Terminen von den meisten Studierenden positiv beurteilt.

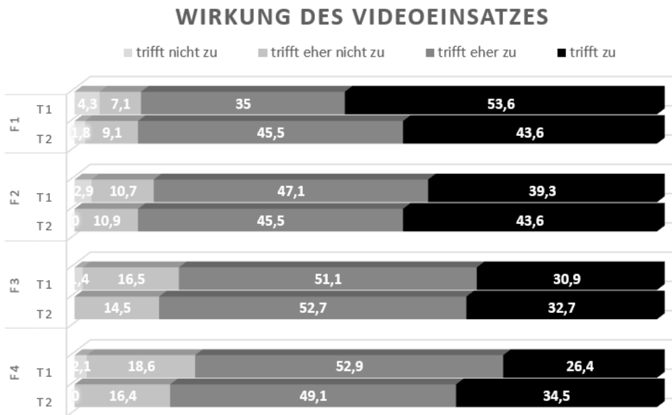


Abb. 5: Wirkung des Videoeinsatzes nach Einschätzung der Studierenden (in Prozentangaben)

Die Wirkung des Videoeinsatzes wurde von den Studierenden bei beiden Einsätzen positiv bewertet. Dabei wurden die Studierenden befragt, ob der Videoeinsatz eine sinnvolle Bereicherung für die Vorlesung darstellt (F1), die Aufmerksamkeit steigert (F2), die Motivation fördert (F3) und das Interesse steigert (F4). Die Einschätzung hat sich vom ersten zum zweiten Durchgang hinsichtlich der meisten Aspekte leicht verbessert. Auch der Einsatz des Audio Response Systems PINGO wurde von den Studierenden überwiegend positiv beurteilt. So gaben 85,1% der Studierenden bei der zweiten Durchführung an, dass der Einsatz von ARS ihre Bereitschaft zur aktiven Teilhabe an der Vorlesung erhöht, und 90,6% schätzte die Verwendung von ARS als aufmerksamkeitssteigernd ein.

Fazit und Ausblick

Die positiven Evaluationsergebnisse sowie die Feststellung, dass Studierende im Rahmen ihres Mathematikstudiums regelmäßig auf Videos zugreifen, deuten auf eine große Nachfrage nach Erklärvideos und eine hohe didaktische Passung von Medium und Zielgruppe hin. Die Kombination von Video und ARS eignet sich dabei für den Einsatz während universitären Präsenzveranstaltungen in besonderem Maße, und stellt nach der Einschätzung vieler Studierender eine sinnvolle Bereicherung für die Vorlesung dar, welche sich positiv auf Interesse und Motivation auswirken kann. Bei der Umsetzung im Bereich der Mathematik gilt es dabei jedoch auf die Notwendigkeit eines deutlich geringeren Sprechtempos als in anderen Fachgebieten zu achten, denn trotz der Überarbeitung des Videos nach dem ersten Piloteinsatz wird das Tempo weiterhin als zu hoch bewertet. Ebenfalls sollen die Möglichkeiten einer aktiv-entdeckende Auseinandersetzung mit Mathematik im Rahmen der Videos ausgelotet werden (siehe Römer & Nührenbörger 2018). Derzeit werden weitere Videos zu den Themen Mengenoperationen, Relationseigenschaften, Schubfachprinzip und Abzählbarkeit produziert; des Weiteren sollen Videos erstellt werden, die methodisches Wissen vermitteln sollen, insbesondere die Herangehensweise an typische Übungsaufgaben sowie die Suche nach einer geeigneten Beweismethode oder Problemlösestrategie. Eine umfassende Evaluation des Einsatzes von Erklärvideos mit Einbezug von Peer Instruction befindet sich in Planung.

Literatur

Bauer, T. (2019). Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. In: Mathematische Semesterberichte 66 (2), S. 219–241.

Bischof, S. & Mehner, C. (2015). Förderung von Videos in der Hochschullehre: Begleitstudie untersucht Sicht der Studierenden. e-teaching.org.

Duncan, D. & Mazur. E. (2005): Clickers in the classroom. How to enhance science teaching using classroom response systems. San Francisco: Pearson Education.

Erlemann, J., Johner, R. & Werder, C. M. (2014). Mobile Response Tool: Funktionsweise und didaktische Möglichkeiten.

Fischer, M. & Spannagel, C. (2012). Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In: J. Desel et al. (Hrsg.). DeLFI 2012 – Die 10. E-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V. Bonn.

Guo, P. J., Kim, J. & Rubin, R. (2014). How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos. In: L@S ’14 Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale Conference. Atlanta, Georgia, USA.

Handke, J: & Schäfer, A. M. (2012). E-Learning, E-Teaching und E-Assessment in der Hochschullehre: Eine Anleitung. Oldenburg Wissenschaftsverlag, S. 243 ff.

Hoppenbrock, A. et al. (2012). Fachdidaktischer Einsatz eines elektronischen Votingsystems zur Aktivierung von Mathematikstudierenden in Erstsemestervorlesungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM-Verlag, S. 389 - 392.

Kerres, M. et al. (2008). Konzeption von Angeboten des Online-Lernens. In: Online-Lernen: Planung, Realisation, Anwendung und Evaluation von Lehr- und Lernprozessen online. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, S. 263-273.

Mazur, E. (2006). Peer Instruction: Wie man es schafft, Studenten zum Nachdenken zu bringen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 55, S. 11-15.

Römer, S. & Nührenbörger, M. (2018) Entdeckerfilme im Mathematikunterricht der Grundschule – Entwicklung und Erforschung von videobasierten Lernumgebungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2018, Band III, S. 1511-1514. Münster: WTM-Verlag.

Strayer, J. F. (2012). How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. Learning Environment Research, 15(2), S. 171–193.

Spannagel, C. (2013). Die Mathematikvorlesung aus der Konserve. In: Sprenger, J. et al. (Hrsg.): Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen - Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule, S.253-261. Wiesbaden: Springer.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), S. 151-169.

Wachtler, J. & Ebner, M. (2014). Unterstützung von videobasiertem Unterricht durch Interaktionen – Implementierung eines ersten Prototyps. Zeitschrift für Hochschulentwicklung 9(3), S. 13-22.

Witt, H. & Strüver, T.: Ein Publikumsjoker für die Lehre (Poster). In: G. Csanyi, F. Reichl & A. Steiner (Hrsg.). Digitale Medien – Werkzeuge für exzellente Forschung und Lehre, S. 306-312.

Diproche – Ein automatisierter Tutor für den Einstieg ins Beweisen

Merlin Carl, Regula Krapf

An der Europa-Universität Flensburg wird in Kooperation mit der Universität Koblenz-Landau und Concludio das Computerprogramm Diproche (Didactical Proof Checking) entwickelt, welches auf Methoden der Computerlinguistik und automatischem Beweisen basiert. Das Ziel besteht darin, Mathematikstudierenden im ersten Semester einen automatisierten Tutor zur Verfügung zu stellen, welcher ihnen den Einstieg ins Beweisen erleichtert. Diproche überprüft dabei in natürlicher deutscher Sprache eingegebene Beweise und gibt Tipps zu weiteren Beweisschritten. Es werden erste Einblicke gewährt sowie Ideen zum Einsatz von Diproche in der Hochschullehre präsentiert.

Einleitung

Studierende der Mathematik haben in der Studieneingangsphase oft erhebliche Probleme bei der Bearbeitung der wöchentlichen Übungsaufgaben (Frischemeier et al, 2016). Dies betrifft in besonderem Maße Beweisaufgaben. So scheitern bereits viele Studierenden am Verständnis der Aufgabenstellung und der Suche nach einer geeigneten Beweisstrategie (Moore, 1994). Ein weiteres Problemfeld besteht im Umgang mit der durch eine hohe Informationsdichte ausgeprägten mathematischen Fachsprache, insbesondere die Verwendung logischer Symbole wie beispielsweise Quantoren (Hefendehl-Hebeker, 2016). Ist die Aufgabe einmal nachvollzogen und eine Beweisidee entwickelt worden, so stellt die Verschriftlichung der Lösung eine weitere Hürde dar. Zudem verunsichert die deduktiv-axiomatische Arbeitsweise viele Studierende, da plötzlich angebliche Trivialitäten wie die Nichtnegativität von x^2 für eine beliebige reelle Zahl x bewiesen werden müssen. Diese Verunsicherung führt dazu, dass Studierende oftmals nicht mehr wissen, welche Annahmen in einem Beweis überhaupt verwendet werden dürfen.

Bereits George Polya hat gesagt: „Vergesst nicht: Wenn ihr schwimmen lernen wollt, dann geht mutig ins Wasser, wenn ihr lernen wollt, Aufgaben zu lösen, dann löst sie.“ In der Hochschulmathematik übernimmt diese Rolle üblicherweise der Übungsbetrieb. Der klassische Übungsbetrieb birgt jedoch einige Probleme: So findet die Bearbeitung der wöchentlichen

Übungsblätter üblicherweise außerhalb der Hochschule und daher oft alleine statt. Oftmals würde zur erfolgreichen Lösung einer Aufgabe jedoch ein kleiner Tipp ausreichen. Zudem erfolgt die Rückmeldung mit erheblichem zeitlichem Abstand zur Verfassung der Lösung und kann daher in den Lösungsprozess nicht eingehen. Diese Problematik führt insbesondere auch zu häufigem Abschreiben (Göller & Liebendörfer, 2015). Obwohl studentische Tutoren üblicherweise die Abgaben der Übungsblätter korrigieren, ist das Feedback dennoch uneinheitlich (Püschl et al., 2016).

Aus dieser Problemstellung entstand die Idee, die Aufgabenbearbeitung einschließlich Rückmeldungen partiell zu automatisieren. Dabei gilt es zu beachten, dass sich dafür nicht jede Beweisaufgabe gleichermaßen eignet: So gibt es „Trickaufgaben“ wie beispielsweise Anwendungen von heuristischen Problemlösestrategien wie dem Schubfach- oder Invarianzprinzip, welche eine kreative Idee erfordern. Auch visuell orientierte Beweise sind nicht leicht zu automatisieren, obschon es bereits Ansätze in diese Richtung gibt (Jamnik et al., 1999). Wir werden uns in diesem Artikel vor allem auf formal-deduktive Beweise beschränken, wie beispielsweise der Beweis einer Mengengleichheit.

Ziele des Diproche-Projekts

Das Projekt Diproche (**Di**dactical **Pro**of **Che**cking), welches an der Europa-Universität Flensburg in Kooperation mit Concludio und der Universität Koblenz-Landau entwickelt wird, verfolgt das Ziel, Studierende mit Hilfe eines Computerprogramms an die deduktiv-axiomatische Arbeitsweise und insbesondere ans Beweisen heranzuführen. Dabei sollen Beweisversuche in einer sogenannten kontrollierten natürlichen Sprache, d.h. in einem reglementierten, aber für Studienanfänger*innen zugänglichen Fragment der natürlichen Sprache, angenommen und überprüft werden, sowie Rückmeldungen zu Fehlschlüssen und Hinweise für weitere Beweisschritte geliefert werden. Die Korrektur soll einerseits die Eingabe auf sprachliche Korrektheit und Typenkorrektheit und andererseits auf das Erreichens des Beweisziels überprüfen.

Als Vorbild dient das Naproche-System, ein kooperatives Projekt aus der mathematischen Logik (Universität Bonn) und der Linguistik (Universität Duisburg-Essen), welches in wesentlichen Teilen im Rahmen der Doktorarbeit von Marcos Cramer (Cramer, 2013; Cramer et al., 2010) entwickelt wurde. Das Naproche-Projekt verfolgt das Ziel, mathematische Texte automatisch prüfbar zu machen, die in einer der mathematischen Alltagsfachsprache möglichst nahen Sprache verfasst sind. Naproche ist dabei auf die Verarbeitung von Texten ausgerichtet, die aus mehreren Definitionen, Sätzen und Beweisen bestehen. Die Überprüfung von Beweisschritten erfolgt durch einen externen automatischen Theorembeweiser (ATP). Das Naproche-System hat hinsichtlich der Natürlichkeit und Komplexität der verarbeitbaren Texte in letzter Zeit einige bemerkenswerte Fortschritte gemacht. Für einen Einsatz in der Hochschullehre ist es jedoch u.a. aus den folgenden Gründen kaum geeignet: Zum einen besteht die Zielgruppe von Naproche aus erfahrenen Mathematikern, welche nicht am Lernen von Beweistechniken, sondern an der Formalisierung und automatischen Überprüfung bereits bekannter Beweise interessiert sind. Insbesondere sind die vom ATP akzeptierten Beweisschritte nicht kontrollierbar und oft so umfassend, dass für viele Anfängeraufgaben ein einfaches „Trivial“ als „Beweis“ genügen würde. Zum anderen fehlen in Naproche differenzierte Rückmeldungen, die für einen didaktischen Einsatz unerlässlich sind. Schließlich bildet die Naproche-Sprache keine für den Lehrkontext bzw. das jeweilige Teilgebiet typischen Formulierungs- und Schlussmuster ab, sodass viele gängige Figuren nicht eingesetzt werden können. Ein einfaches Beispiel wäre das Symbol „$\subseteq$“, um im Beweis einer Mengengleichheit anzuzeigen, dass nun eine Teilmengenbeziehung bewiesen wird; ein gewichtigeres die Berücksichtigung von Berechnungen und Umformungsketten als Teil einer Lösung. So müssten beim axiomatischen Ansatz von Naproche etwa Umformungen wie $(a-b)^2+ab=a^2-ab+b^2$ aus den Axiomen für die Addition und Multiplikation reeller Zahlen abgeleitet werden, während sie im Lehrkontext gewöhnlich als elementare Schritte gelten können.

Die Idee des computergestützten interaktiven Beweisens ist nicht neu. Unter den (zahlreichen) Ansätzen zum Einsatz automatischer Beweisprüfer in der Lehre befinden sich zum einen einige spezialisierte Beweissysteme, welche sich auf ein einzelnes Themenfeld beziehen, so zum Beispiel das klassische System „GEOBEWEIS“ von Gerhard Holland (Holland, 1990) oder „QED-Tutrix“ (Font et al., 2018), welche ausschließlich interaktives Beweisen in der Elementargeometrie ermöglichen. Weitere Beweiser befassen sich mit Aussagen- und Prädikatenlogik, so Terence Taos „QED“[1] und „NaDeA“ (Villadsen et al., 2019). Zum anderen werden, insbesondere in Lehrveranstaltungen der Informatik, interaktive Beweissysteme wie Coq oder Isabelle eingesetzt (Böhne et al, 2016). Ein entscheidender Unterschied zwischen den oben genannten Systemen und Diproche besteht in der sprachlichen Ausgestaltung; in all diesen Beispielen wird eine formale Sprache verwendet, welche sich deutlich von der natürlichen Fachsprache der Mathematik unterscheidet. So wird in einer rein formalen Umgebung gearbeitet, in der formale Beweisziele durch Anwendung eines festen Regelsatzes zu erreichen sind. Das Bestehen auf expliziter Angabe von Schluss- bzw. Umformungsregeln begrenzt diese Ansätze: Auch in einfachen Beweisen im Anfängerbereich wird schnell eine große (sicherlich dreistellige) Zahl an Schlussweisen wie selbstverständlich verwendet; diese jeweils z. B. in einer Liste „nachschlagen“ zu müssen, wäre ein unverhältnismäßig hoher Aufwand, der zudem vom eigentlichen Beweisgeschehen ablenken würde. Die App „Concludio“ von Grewing et al.[2], welche sich derzeit in Entwicklung befindet, orientiert sich zwar an der natürlichen Sprache, arbeitet aber mit vorgegebenen Formulierungen, die aus einer Liste ausgewählt werden können. Während bei Concludio einige Umformungsschritte ohne weitere Erläuterung akzeptiert werden, müssen auch hier die meisten Schritte durch Angabe einer Schluss- oder Umformungsregel explizit gerechtfertigt werden. Im Gegensatz dazu strebt Diproche ein größeres Maß an Nähe zur gängigen Darstellungspraxis an, einerseits durch die Ermöglichung einer Freitexteingabe, andererseits

1 www.math.ucla.edu/~tao/QED/QED.html

2 www.concludio.education

dadurch, dass Schluss- und Umformungsregeln in der Beweisdarstellung implizit bleiben können. Das ermöglicht es z. B. eine weitaus größere Zahl an Schlussweisen zu erlauben, als bei einer Explikation realistisch wäre.

Funktionsweise von Diproche

Die Diproche-Sprache

Die Sprache von Diproche orientiert sich an dem in der mathematischen Beweispraxis häufig verwendeten Vokabular. Dabei wird jedem zugelassenen Ausdruck eine präzise Funktion zugeordnet. So können Annahmen durch Ausdrücke wie „Es gelte“, „Angenommen, es gilt“ oder „Nehmen wir an, dass“ formuliert werden. Eine Übersicht über die in der Diproche-Sprache zugelassenen Ausdrücke sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Funktion	Erläuterung	Beispielausdrücke
Annahme	Eine Annahme ist eine Aussage A, welche im Beweis einer Aussage B unter Verwendung einer Schlussregel wie A→B zur Verfügung steht. Annahmen bleiben solange gültig, bis der Absatz beendet oder ein Beweisendmarker wie „qed“ angegeben wird.	„Angenommen, es gilt“ „Nehmen wir an, dass“
Axiom	Axiome sind Aussagen, die in allen darauffolgenden Beweisschritten als Annahme zur Verfügung stehen.	„Laut Vorlesung gilt“ „Wir wissen, dass“

Behaup-tung	Behauptungen sind Aussagen, die im Falle eines akzeptablen Beweises, an der angeführten Stelle aus den aktuell zur Verfügung stehenden Annahmen gefolgert werden können.	„Dann folgt“ „Widerspruch“ (gibt an, dass an dieser Stelle ein Widerspruch gefolgert werden kann) „Da A, gilt B“ (gibt an, dass B einzig aus der Annahme A folgt)
Annotation	Annotationen ermöglichen eine Strukturierung des Beweises, beispielsweise durch Aktualisierung von Beweisziel und zur Verfügung stehenden Annahmen.	„Wir zeigen, dass“ (Deklarierung eines Beweisziels) „Fall 1“ (Einführung einer Fallunterscheidung) „qed“ (Erfüllung des aktuellen Beweisziels)

Tab. 1: Erläuterung der verschiedenen Bestandteile der Diproche-Sprache mit Beispielitems

Erläuterung der Zielverfolgung anhand eines Beispieltexts

Im Folgenden ist ein Beispieltext in der Diproche-Sprache aus der Aussagenlogik angeführt, ein Themenfeld, welches üblicherweise zu Beginn des Mathematikstudiums behandelt wird. Dabei wird bewiesen, dass es sich bei der Aussage $a\vee b\leftrightarrow((a\to b)\to b)$ um eine Tautologie handelt.

Wir zeigen $a\vee b\leftrightarrow((a\to b)\to b)$.

=> Angenommen, es gilt $(a\vee b)$. Angenommen ferner, es gilt $(a\to b)$. Falls a gilt, so gilt b. Falls b gilt, so gilt ebenfalls b. Also gilt b.

Damit folgt $((a\to b)\to b)$.

qed.

<= Angenommen, es gilt $((a\to b)\to b)$. Nehmen wir an, es gilt $\neg a$. Dann gilt auch $(a\to b)$. Damit folgt b.

Also folgt $(\neg a\to b)$. Damit folgt $(a\vee b)$.

qed.

Damit folgt endlich $((a\vee b\leftrightarrow((a\to b)\to b))$.

qed.

Abb. 1: Beispieltext in der Diproche-Sprache

Durch den Ausdruck „Wir zeigen, dass“ wird angedeutet, dass die nachfolgende Aussage das aktuelle Beweisziel ist. Da es sich hierbei um eine Äquivalenz handelt, wird der Beweis in zwei Teilbeweise („=>“ und „<=“) untergliedert, bei welchen jeweils eine Implikation gezeigt wird. Durch die Annotation „=>“ wird dabei angegeben, dass sich das aktuelle Beweisziel zu $(a\vee b)\to ((a\to b)\to b)$ aktualisiert. Dieses Beweisziel wird nun gezeigt, indem zunächst die Prämisse $a\vee b$ angenommen wird, und diese somit zum Beweis der Konklusion $(a\to b)\to b$ verwendet werden kann, welche so zum neuen Beweisziel wird. Da es sich auch hier um eine Implikation handelt, wird $a\to b$ als weitere Annahme hinzugefügt, sodass sich das Beweisziel erneut aktualisiert. Dieses wird nun mittels Fallunterscheidung begründet. Die Erfüllung dieses Ziels wird durch den Beginn eines neuen Absatzes markiert, wodurch automatisch die Annahmen des vorangehenden Absatzes zurückgezogen werden. Der Beweisendmarker „qed“ zeigt nun, dass der erste Teilbeweis („=>“) abgeschlossen ist. Diese hiermit beschriebene Zielverfolgung ermittelt an jeder Stelle des Beweises das aktuelle Beweisziel und prüft für jeden Absatz unter Verwendung der angegebenen Annahmen und der zulässigen Schlussregeln, ob das zugehörige Ziel tatsächlich erreicht wurde. Eine Veranschaulichung der Zielverfolgung findet sich in Tab. 2:

Satz	**Annahmen**	**Aktuelles Beweisziel**
Wir zeigen $((a\lor b)\leftrightarrow((a\to b)\to b))$.		$(a\lor b)\leftrightarrow((a\to b)\to b)$
=>		$(a\lor b) \to ((a\to b)\to b)$
Angenommen, es gilt $(a\lor b)$.	$a\lor b$	$(a\to b)\to b$
Angenommen ferner, es gilt $(a\to b)$.	$a\lor b$, $a\to b$	b
Falls a gilt, so gilt b.	$a\lor b$, $a\to b$, a	b (erfüllt)
Falls b gilt, so gilt ebenfalls b.	$a\lor b$, $a\to b$, b	b (erfüllt)
Also gilt b.	$a\lor b$, $a\to b$	b (erfüllt)
Damit folgt $((a\to b)\to b)$.	$a\lor b$	$((a\to b)\to b)$ (erfüllt)
qed.		$(a\lor b) \to ((a\to b)\to b)$ (erfüllt)

Tab. 2: Zielverfolgung am Beispiel der Tautologie $(a\lor b)\leftrightarrow((a\to b)\to b)$

Die Beweisüberprüfung

Die Prüfroutine von Diproche ist in der logischen Programmiersprache Prolog verfasst und besteht – in Anlehnung an das Naproche-System – aus den Komponenten Vorverarbeitung, Textannotation, Textstruktur und ATP (Automatischer Theorembeweiser), deren Funktionsweise wir hier am Beispiel des Textes „Beweis. Es gelte a. Dann folgt $(a\lor b)$.“ erläutern (siehe Tab. 3).

Komponente	Beschreibung	Beispiel
Vorverar-beitung	Übersetzung des Eingabestrings in eine Prolog-Liste.	[[beweis], [es, gelte, a], [dann, folgt, [a, or, b]]]
Textanno-tation	Nummerierung der Sätze und Angabe ihrer Funktion (Behauptung, Annahme, Axiom, Annotation).	[[1, [], [], ann, bam, []], [2, [a], [], ang, [], [a]], [3, [a, b], [], beh, [], [[a, or, b]]]][3]
Textstruktur	Erstellung eines Zugänglichkeitsgraphen, der angibt, welche Annahmen an welchen Stellen des Beweises zur Verfügung stehen.	[2,3], d.h. um Satz 3 zu beweisen darf Annahme 2 verwendet werden.
ATP	Akzeptanz gewisser logischer Schlussregeln sowie (Term-) Umformungen.	Generierung des Beweisziels [[a],[a,or,b]] von Satz 3.

Tab. 3: Erläuterung der Komponenten von Diproche anhand des Beispieltexts „Beweis. Es gelte a. Dann folgt (a∨b)."

Diproche enthält also einen eigenen automatischen Theorembeweiser. Dieser akzeptiert nicht nur logische Schlussfolgerungen wie den Modus ponens, d.h. aus der Gültigkeit einer Aussage a und a→b darf die Gültigkeit von b geschlossen werden, sondern auch Umformungsketten wie etwa $(a+b)^2-4ab=(a^2+2ab+b^2)-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

3 „ann" steht für „Annotation", „bam" für „Beweisanfangsmarker", „ang" für „Annahme" und „beh" für „Behauptung"

Fehlerrückmeldungen und Hinweise

Viele Fehler von Studienanfängerinnen und Studienanfängern sind Typenfehler. So werden Terme und Formeln verwechselt oder Variablen verwendet, die an keiner Stelle explizit eingeführt werden. Beispielsweise ist der Ausdruck „Angenommen, es gilt $7+\emptyset$“ aus zweierlei Gründen sinnlos: Einerseits muss auf „Angenommen, dass“ eine Aussage, also kein Term, folgen, und andererseits können in die Funktion „+“ nur Zahlen eingesetzt werden. Das bei Diproche implementierte Typechecking prüft zunächst, ob alle in einem Ausdruck auftretenden Variablen deklariert sind. Ist dies der Fall, so berechnet es den Typ zusammengesetzter Terme und prüft iterativ, ob die in Relationen bzw. Funktionen auftretenden Terme vom richtigen Typ sind.

Eine hilfreiche Korrektur gibt nicht nur Aufschluss darüber, wo ein Fehlschluss erfolgt, sondern auch auf welcher Fehlvorstellung ein solcher basiert. Aus diesem Grund beinhaltet Diproche einen Anti-ATP, der im Gegensatz zum ATP statt korrekten Beweisschritten häufige formale Fehlschlüsse identifiziert und darüber Rückmeldungen liefert. Dabei werden zwei Arten von Fehlschlüssen erkannt: Zum einen sind dies logische Fehlschlüsse, wie beispielsweise die Folgerung von $\neg B$ aus $A \rightarrow B$ und $\neg A$, welche auf der Fehlvorstellung beruht, dass $A \rightarrow B$ und $\neg A \rightarrow \neg B$ logisch äquivalent sind. Die zweite Art von Fehlschlüssen betrifft Termumformungen, wie beispielsweise die Addition von Brüchen nach dem Prinzip „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“.

Diproche beinhaltet zudem einen Tippgeber, welcher drei Möglichkeiten Tipps abzufragen bietet. Einerseits sind dies allgemeine strategische Hinweise, welche von der syntaktischen Form des aktuellen Beweisziels abhängen. Ist beispielsweise eine Annahme eine Disjunktion $A \vee B$, so erhält man den Hinweis, eine Fallunterscheidung durchzuführen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass der automatische Beweiser versucht, den Beweis zu komplettieren. Gelingt dies in höchstens 10 Schritten, so liefert er einen Zwischenschritt in der Mitte des Beweises als Lösungshinweis. Zudem können Dozierende aufgabenspezifische Tipps vorgeben, welche Hinweisen auf Übungsblättern entsprechen.

Potentiale für die Hochschullehre

Der Einsatz interaktiver Beweissysteme im Übungsbetrieb hat den Vorteil, dass Studierende bereits während des Beweisfindungsprozesses Hinweise sowie unmittelbares Feedback erhalten. Die Rückmeldungen sind zudem standardisiert und differenzierter als die wöchentliche Korrektur der Übungsblätter. Interaktive Beweiser ermöglichen auch, dass Beweisfindung und Verschriftlichung miteinander einhergehen. Die Verwendung einer kontrollierten natürlichen Sprache in der Studieneingangsphase hat nicht nur den Vorteil der möglichen Automatisierung, sondern kann Studierenden durch die Einschränkung des Vokabulars auch eine gewisse Sicherheit im Umgang mit der mathematischen Fachsprache gewähren. So muss die Bedeutung aller zentralen Ausdrücke expliziert werden, und die Studierenden können sich so die Sprache aktiv aneignen.

Diproche kann nicht nur in den universitären Übungsbetrieb im ersten Semester oder in Vorkursen eingebunden werden, sondern auch in Vorlesungen. Dabei könnten Dozierende darauf achten, in den Lehrveranstaltungen gezielt die Diproche-Sprache zu verwenden. Ein Versuch eine kontrollierte natürliche Sprache in eine Mathematikveranstaltung zu integrieren, wurde in der Vorlesung „Analysis 1" an der Universität Konstanz (Junk, 2017) bereits initiiert. Durch die Verwendung eines diproche-basierten Lehrbuchs können auch die Verbindungen zwischen Vorlesungs- und Übungsbetrieb unterstrichen werden. Es gilt allerdings auch zu beachten, dass Diproche den herkömmlichen Übungsbetrieb nicht gänzlich ersetzen kann, sondern stattdessen als bereichernde Ergänzung, insbesondere bei der Formulierung formal-deduktiver Beweise, betrachtet werden sollte.

Durch eine umfangreiche Evaluierung des Einsatzes von Diproche in der Hochschullehre können auch interessante Erkenntnisse darüber gewonnen werden, welche Schwierigkeiten die Studierenden beim Beweisen haben, in welchen Bereichen sie Hilfestellungen benötigen und welche Fehlschlüsse häufig vorkommen. Diese Ergebnisse können dann einerseits für die Weiterentwicklung von Diproche und andererseits auch durch die Berücksichtigung potentieller Fehlvorstellungen für die Verbesserung der klassischen Mathematikveranstaltungen verwendet werden.

Herausforderungen und Ausblick

Bevor Diproche in der Hochschullehre eingesetzt werden kann, müssen noch einige Hindernisse überwunden werden. Derzeit wird an der Universität Koblenz-Landau in Kooperation mit Concludio ein User-Interface entwickelt, welches nicht nur eine Freitexteingabe, sondern auch vorgefertigte Textbausteine und mathematische Symbole bereitstellen soll. Eine weitere Herausforderung besteht darin, natürliche Schwierigkeitsgrade und Beweismethoden in konkrete Schlussregeln zu übersetzen. Es werden verschiedene sogenannte „Spielwiesen“ erstellt, welche die Arbeit in einem spezifischen Themengebiet der Elementarmathematik wie der Booleschen Mengenlehre, elementaren Zahlentheorie oder elementaren axiomatischen Geometrie erlauben, wobei jede Spielweise zusätzlich über eigene Typen, Vokabular, Bezeichnungskonventionen und Schlussregeln verfügt. Beispielsweise wird die Spielwiese „Boolesche Mengenlehre“ um den Typ „Menge“, das Inklusionssymbol $\subseteq$, und die Schlussregel „Zeige A=B durch $A\subseteq B$ und $A\subseteq B$“ angereichert. Langfristig wird die Erstellung eines Diproche-basierten Lehrbuchs anvisiert, auf welches man sich bei der Eingabe eines Diproche-Texts beziehen kann. Zudem soll neben einem großen Pool an Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade und mit individuellen Lösungshinweisen auch ein Aufgabengenerator geschaffen werden. Für den Einsatz im Lehrbetrieb muss Diproche systematisch getestet, evaluiert und anhand der daraus resultierenden Ergebnisse weiterentwickelt werden.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Püschl, J. & Schreiber, S. (2016). Wie geben Tutoren Feedback? Anforderungen an studentische Korrekturen und Weiterbildungsmaßnahmen im LIMA-Projekt. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H. Rück (Hrsg.). Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Wiesbaden: Springer Fachmedien

Böhne, S., Kreitz, C. & Knobelsdorf, M. (2016). Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit dem Theorembeweiser Coq. Comentarii informaticae didacticae 10, S. 69-80.

Carl, M., Cramer, M. & Kühlwein, D. (2009). Chapter 1 of Landau in Naproche, the first chapter of our Landau translation. Verfügbar unter www.naproche.net/downloads/2009/landauChapter1.pdf (abgerufen am 26.11.2019).

Cramer, M., Fisseni, B., Koepke, P., Kühlwein, D., Schröder, B. & Veldman, J. (2010). The Naproche Project. Controlled Natural Language Proof Checking of Mathematical Texts. In N.E. Fuchs (Hrsg.). Controlled Natural Language. CNL 2009. Lecture Notes in Computer Science 5972. Berlin Heidelberg: Springer.

Cramer, M. (2013). Proof-checking mathematical texts in controlled natural language. Dissertation an der Rheinischen Friedrich-Wilhems-Universität Bonn.

Font, L., Gagnon, M. & Richard, P. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. In P. Quaresma & W. Neuper (Hrsg). 6th International Workshop on Theorem Proving components for Educational software. EPTCS 267. S.38-58.

Frischmeier, D., Panse, A. & Pecher, T. (2016). Schwierigkeiten von Studienanfängern bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H. Rück. (Hrsg.). Lehren und Lernen in der Studieneingangsphase. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H. Rück. (Hrsg.). Lehren und Lernen in der Studieneingangsphase. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Holland, G. (1990). Konstruieren mit dem Computer. In K. Graf (Hrsg). Computer in der Schule 3. Stuttgart: Vieweg+Teubner Verlag.

Jamnik, M., Bundy, A. & Green, I. (1999). On Automating Diagrammatic Proofs of Arithemtic Arguments. Journal of Logic, Language and Information 8, S. 297-321.

Junk, M. (2017). Analysis 1. Vorlesungsskript an der Universität Konstanz im Wintersemester 2016/17.

Liebendörfer, M. & Göller, R. (2016). Abschreiben – Ein Problem in mathematischen Lehrveranstaltungen? In W. Paravicini & J. Schnieder (Hrsg.). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014. Münster: WTM-Verlag.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics 27(3), S. 249-266.

Villadsen, J., Halkjaer From, A. & Schlichtkrull, S. (2019). Natural Deduction Assistant (NaDeA). In P. Quaresma und W. Neuper (Hrsg.). Proceedings of the 7th International Workshop on Theorem proving components for Educational software.

Qualitative Zugänge zur Integralrechnung durch Einsatz der 3D-Druck-Technologie

Frederik Dilling

Die Bedeutung von qualitativen Zugängen zu zentralen Themen der Analysis wird schon seit langem diskutiert. Durch den vermehrten Einsatz digitaler Medien rücken stoffdidaktische Überlegung zur Entwicklung solcher Zugänge wieder in den Fokus der Diskussionen. Im Beitrag wird die 3D-Druck-Technologie beleuchtet, welche die individuelle Entwicklung haptischer Arbeitsmaterialien für den Mathematikunterricht ermöglicht. Hierzu sollen ein theoretischer Hintergrund basierend auf dem Konzept der empirischen Theorien im Mathematikunterricht vorgestellt sowie die Möglichkeiten der neuen Technologie am Beispiel der Integralrechnung aufgezeigt werden.

Einleitung

Mit der 3D-Druck-Technologie werden im Zuge der Digitalisierung teilweise tiefgreifende wirtschaftliche und gesellschaftliche Veränderungen vermutet. Auch im Bildungsbereich gewinnt die Technologie zunehmend an Bedeutung. Der folgende Beitrag soll am Beispiel der Integralrechnung auf der Grundlage stoffdidaktischer Erörterungen aufzeigen, welche Möglichkeiten die Technologie in Begriffsentwicklungsphasen des Mathematikunterrichts haben kann. Dazu wird zunächst ein theoretischer Hintergrund zur Untersuchung der Begriffsentwicklung von Schülerinnen und Schülern im Kontext digitaler Medien vorgestellt. Anschließend wird der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht beschrieben und an vier Beispielen aus der Integralrechnung konkretisiert.

Ein Konzept zur Begriffsentwicklung mit digitalen Medien

Beim Mathematikunterricht der Schule handelt es sich nicht um die Vermittlung einer formalen Wissenschaft über abstrakte Objekte. Stattdessen wird Mathematik in der Schule meist in Zusammenhang mit realen Phänomenen entwickelt, sodass eine ontologische Bindung des Wissens mit Bezug auf empirische Referenzobjekte entsteht (vgl. Hefendehl-Hebeker, 2016). Diese Tendenz wird durch den Einsatz digitaler Medien noch einmal verstärkt, da sie eine Vielzahl experimenteller und anschauungsgeleiteter Settings bereitstellen.

Das Konzept der empirischen Theorien nach Burscheid & Struve (2010) kann zur Beschreibung des Wissens von Schülerinnen und Schülern in einem solchen empirisch-orientierten Mathematikunterricht herangezogen werden (vgl. Pielsticker, 2020). Demnach entwickeln Schülerinnen und Schüler in einem von Anschauung und Realitätsbezug geprägten Mathematikunterricht eine empirische Auffassung von Mathematik. Das entwickelte Wissen bezieht sich auf spezifische Bereiche ihrer Erfahrung und ist damit kontextgebunden (vgl. Bauersfeld, 1983). Die Wissensspeicherung erfolgt in sogenannten subjektiven Erfahrungsbereichen, die wesentlich die Begriffsentwicklung und Argumentation im Unterricht beeinflussen. Daher bedarf eine adäquate Rekonstruktion der Wissensstruktur von Schülerinnen und Schülern einer Beschreibung der subjektiven Erfahrungsbereiche sowie der entsprechenden Referenzobjekte und -beziehungen. Auf dieser Basis kann das Wissen der Lernenden als empirische Theorie über die kennengelernten Phänomene beschrieben werden.

Die Begriffsentwicklungsprozesse im Mathematikunterricht werden von der Lehrkraft häufig auf der Basis von stoffdidaktischen Überlegungen in Bezug auf den jeweiligen mathematischen Sachverhalt angeregt. Dies wird meist dadurch realisiert, dass Lernumgebungen mit empirischen Objekten (z. B. Darstellungen in GeoGebra) entwickelt werden, die bei geeigneter Interpretation z. B. eine bestimmte Grundvorstellung (Vom Hofe, 1992) ansprechen können. Im Zusammenhang mit der Integralrechnung, die in diesem Beitrag diskutiert wird, können die Flächeninhaltsgrundvorstellung (Flächeninhalt einer krummlinig berandeten Fläche), die Rekonstruktionsgrundvorstellung (Integrieren und Ableiten als gegenseitige Operationen), die Mittelwertsgrundvorstellung (Mittelwert als bestimmtes Integral geteilt durch die Intervalllänge) sowie die Kumulationsgrundvorstellung (Integral als Produktsumme) unterschieden werden (vgl. Greefrath et al., 2016). Im Umgang mit den in der Lernumgebung bereitgestellten empirischen Objekten bilden die Schülerinnen und Schüler dann subjektive Erfahrungsbereiche aus, deren Rekonstruktion im Rahmen empirischer Theorien erfolgen kann.

Die 3D-Druck-Technologie

Beim 3D-Druck handelt es sich um eine digitale Technologie, mit welcher sich dreidimensionale Objekte herstellen lassen. Unter dem Begriff werden eine Vielzahl verschiedener Druckverfahren gefasst. Für den Einsatz in der Schule eignet sich insbesondere das Fused Filament Fabrication-Verfahren, bei dem Kunststoffe geschmolzen und von einer Düse schichtweise auf ein Druckbett aufgetragen werden (siehe Abbildung 1 links).

Die Herstellung der Objekte basiert auf virtuellen 3D-Modellen, welche mit Computer-Aided Design-Software (CAD) entwickelt werden (siehe Abbildung 1 rechts). Es werden drei Arten von CAD-Programmen unterschieden. Beim direkten Modellieren (z. B. Tinkercad™) werden komplexe Objekte aus Grundkörpern durch Boolesche Operatoren zusammengesetzt (siehe hierzu auch den Beitrag von Felicitas Pielsticker und Ingo Witzke in diesem Tagungsband). Das parametrische Modellieren (z. B. Fusion360) basiert hingegen auf zweidimensionalen Skizzen, die dann durch so genanntes Extrudieren zu dreidimensionalen Körpern entwickelt werden können. Schließlich werden beim skriptbasierten Modellieren Objekte in einer Programmiersprache erzeugt (vgl. Dilling & Witzke, 2019a; Fastermann, 2016).

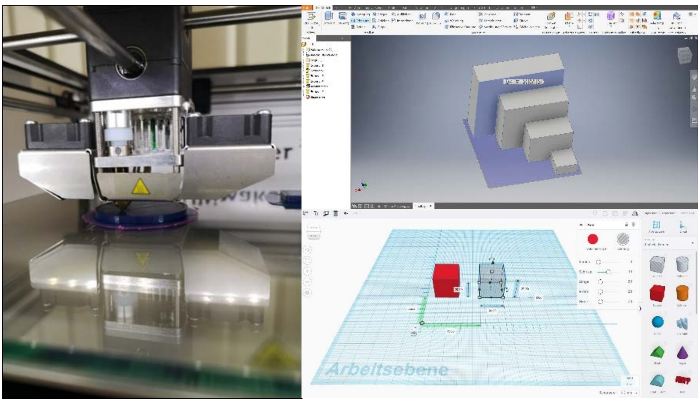


Abb. 1: Druckbett eines 3D-Druckers sowie Screenshots von zwei CAD-Programmen

Die 3D-Druck-Technologie kann zum Lernen von Mathematik auf verschiedene Arten bereichernd eingesetzt werden. Zum einen kann die Lehrkraft individuelles Material für die Schülerinnen und Schüler entwerfen. Zum anderen kann die Technologie aber auch im Unterricht eingesetzt werden, indem die Schülerinnen und Schüler eigene mathematikspezifische Objekte entwerfen (vgl. Witzke & Hoffart, 2018). In beiden Fällen kann ein besonderer Fokus auf Begriffsentwicklungsprozesse gesetzt werden, die sich mit dem Konzept der empirischen Theorien beschreiben lassen. So konnte bereits in verschiedenen Studien gezeigt werden, dass Schülerinnen und Schüler beim Umgang mit der 3D-Druck-Technologie in Phasen der Begriffsentwicklung eine empirische Auffassung von Mathematik entwickeln können (siehe u.a. Dilling et al., 2019; Pielsticker, 2020) – also eine Theorie über die empirischen Objekte bilden (insbesondere durch die Darstellungen im CAD-Programm und die 3D-gedruckten Objekte).

Anwendungen aus der Integralrechnung

Ober- und Untersummen

Die Definition des Integrals als Grenzwert von Ober- und Untersummen gehört zu den klassischen Themen der Analysis. Mit Hilfe der 3D-Druck-Technologie lassen sich Arbeitsmaterialien entwickeln, welche einen qualitativen Zugang zu dieser Definition des Integrals ermöglichen. Diese bestehen aus einem Koordinatensystem, auf welches der Graph einer Funktion gezeichnet ist. Mit kleinen verschiedenfarbigen Plättchen kann die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse näherungsweise ausgelegt werden (Abbildung 2 und 3).

Dazu beginnt man vorzugsweise mit einer Funktion, die im betrachteten Intervall nur positive Funktionswerte besitzt, z. B. die Funktion mit der Vorschrift $f(x)=2\sqrt{x}$ im Intervall $[0,8]$ (Abbildung 2 links). Den Schülerinnen und Schülern werden nun Flächenstücke für eine bestimmte Zerlegung ausgegeben, deren Inhalt der Ober- (dunkelgrün) bzw. Untersumme (hellgrün) entspricht. Nacheinander kann die Fläche unter dem

Graphen mit diesen Flächen ausgelegt (Abbildung 2 Mitte und rechts) und durch Vergleich der Rechtecksflächen die Differenz zwischen Ober- und Untersumme bestimmt werden (Abbildung 2 unten). Dieses Vorgehen kann für verschieden feine Zerlegungen wiederholt werden und die Differenzen von Ober- und Untersumme der verschiedenen Zerlegungen kann qualitativ verglichen werden. Auf diese Weise können Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Differenz bei diesem Beispiel bei feinerer Zerlegung immer kleiner wird.

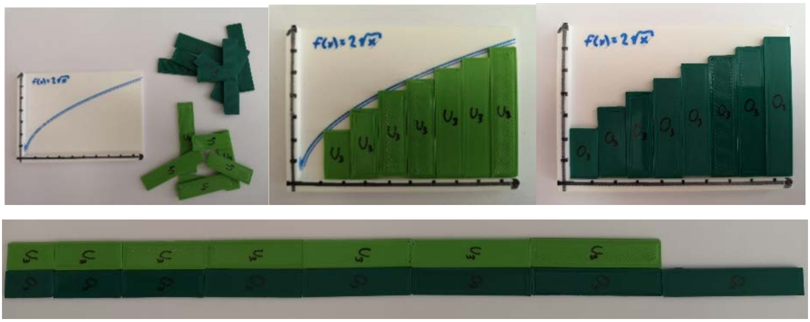


Abb. 2: Arbeitsmaterial zur qualitativen Erarbeitung von Ober- und Untersummen am Beispiel der Funktion $f(x)=2\sqrt{x}$

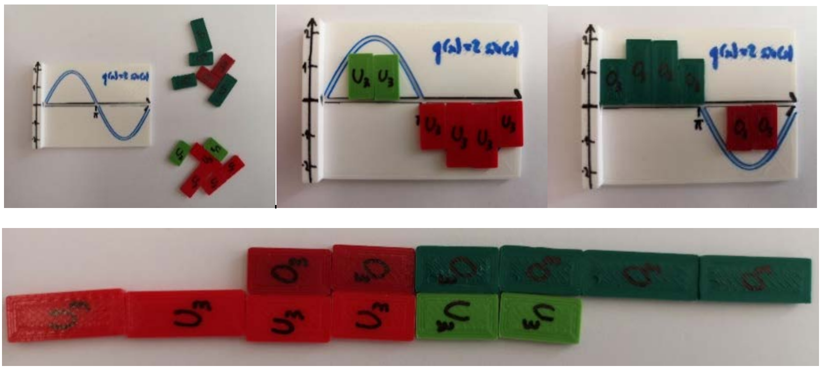


Abb. 3: Arbeitsmaterial zur qualitativen Erarbeitung von Ober- und Untersummen am Beispiel der Funktion $g(x)=2\sin(x)$

In einem zweiten Schritt kann das Prinzip auf Funktionen mit negativen Funktionswerten übertragen werden, z. B. die Funktion mit der Vorschrift $g(x)=2\sin(x)$ im Intervall $[0,2\pi]$ (Abbildung 3). Flächen unterhalb der x-Achse werden in diesem Fall durch rote Flächenstücke ausgelegt, deren Flächeninhalt negativ gewertet wird. Ober- und Untersumme werden entsprechend des Farbkonzepts durch dunkelrote und hellrote Flächenstücke unterschieden. Auch bei Funktionen mit negativen Funktionswerten kann die Differenz der Ober- und Untersumme bei einer bestimmten Zerlegung durch Flächenvergleich qualitativ bestimmt werden (Abbildung 3 unten).

Durch das Material können die Schülerinnen und Schüler experimentell wichtige Aspekte von Ober- und Untersummen kennenlernen. Der qualitative Vergleich der Flächen bei verschiedenen Zerlegungen ermöglicht erste Erfahrungen mit Grenzwertprozessen. Durch das konsistente Farbkonzept werden die Begriffe Obersumme und Untersumme kognitiv an die dunklen bzw. hellen Farbtöne gebunden. Grün steht dabei für einen positiv zu wertenden Flächeninhalt, Rot für einen negativen. Das Ausmessen der Flächen und das Aufschreiben der Werte in Termen führt schließlich zum Begriff der Produktsumme auf einer numerischen Ebene, welcher auf der Basis des Materials dann auch verallgemeinert und durch Anwendung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke algebraisch formuliert werden kann.

Der Vorteil des 3D-Druckers liegt in der hohen Individualität der Produkte. Es können beliebige Funktionsgraphen und Zerlegungen untersucht werden. So kann auch ein Arbeitsauftrag an die Schülerinnen und Schüler lauten, Flächen für eine bestimmte Zerlegung mit einem CAD-Programm selbst zu entwickeln. Auf diese Weise wird eine tiefgehende Auseinandersetzung mit der Thematik erreicht, die zur Entwicklung der Flächeninhalts- sowie Kumulationsgrundvorstellung beitragen kann.

Integraph

Bei einem Integraphen handelt es sich um ein Instrument, das zu einem gegebenen stückweise stetigen Funktionsgraphen den Graphen der

Stammfunktion zeichnet. Mit dem Gerät lassen sich somit unbestimmte Integrale graphisch lösen. Integraphen wurden insbesondere Anfang des 20. Jahrhunderts von Ingenieuren verwendet, sind aber durch die Entwicklung des Computers heutzutage nicht mehr im Gebrauch und nur noch in wenigen Sammlungen von Museen verfügbar. Die 3D-Druck-Technologie ermöglicht die Entwicklung von Integraphen auf der Grundlage der ursprünglichen Geräte zur Nutzung im Bildungsbereich (vgl. Dilling, 2019; Dilling & Witzke, 2018). In Abbildung 4 ist ein in Anlehnung an ein Instrument der Firma A. Ott entwickelter Integraph zu sehen.

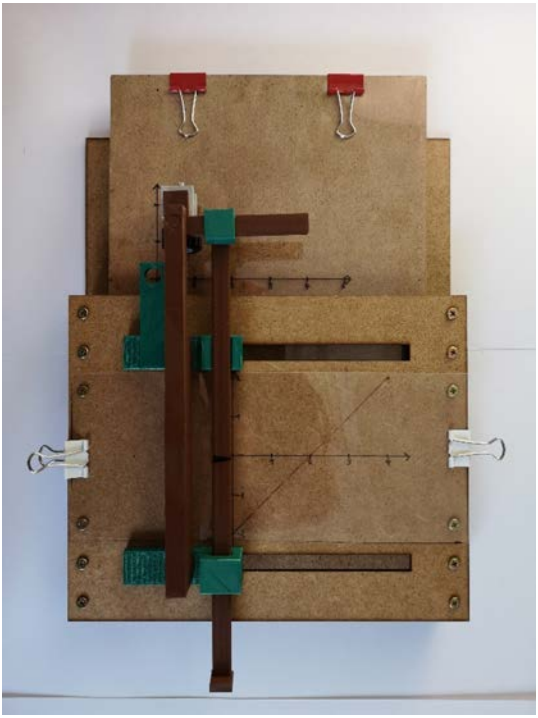


Abb. 4: Mit 3D-Druck-Technologie entwickelter Integraph

Dem Integraphen liegt ein Mechanismus zugrunde, welcher das Übertragen des Funktionswertes eines gegebenen Graphen als Steigung auf einen neuen

Graphen ermöglicht. Dies wird durch ein so genanntes Schneiderad realisiert, welches die obere Zeichenebene verschiebt und auf diese Weise einen stetigen Funktionsgraphen zeichnet. Beim 3D-gedruckten Integraphen wird dies durch ein einfaches Gummirad möglich.

Im Mathematikunterricht kann ein Integraph insbesondere zur Veranschaulichung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung Einsatz finden. Blum (1982) betont, dass sich ein geometrischer Beweis des Satzes auf der Basis des Integraphen anbietet, um die elementargeometrischen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler einzubeziehen. Zudem kann der Integraph das graphische Differenzieren und Integrieren – das Zeichnen des Graphen einer Ableitungs- bzw. Stammfunktion durch näherungsweise Bestimmung von Werten an diskreten Stellen – zu einem kontinuierlichen Prozess entwickeln, in welchem der Funktionscharakter des Integrals betont wird. Die Grundvorstellung der Rekonstruktion kann auf diese Weise gezielt angesprochen werden.

Wesentliche Vorteile des Einsatzes von Integraphen im Unterricht sind das aktive Lernen, bei dem die Mechanismen und zugrundeliegenden mathematischen Überlegungen durch die Schülerinnen und Schüler aufgedeckt werden können. Dies ist besonders dann möglich, wenn unter Zuhilfenahme der 3D-Druck-Technologie die eigene (Nach)entwicklung der Instrumente im Unterricht erfolgt (vgl. Dilling & Witzke, 2019b).

Mittelwert

Mittelwerte von Funktionen sind gerade mit Blick auf die Anwendungen in der Stochastik von Bedeutung im Analysisunterricht. Die 3D-Druck-Technologie ermöglicht die Entwicklung von neuen Arbeitsmitteln zur Vermittlung grundlegender Vorstellungen in diesem Bereich (Abbildung 5 und 6). Es handelt sich dabei um vertikal stehende, flache Objekte, auf welchen ein Koordinatensystem und der Graph einer Funktion gezeichnet wurden. In den Objekten befinden sich Hohlräume, in die sich eine farbige Flüssigkeit füllen lässt. Sie werden mit transparentem Material gedruckt, sodass die farbige Flüssigkeit in den Objekten von außen sichtbar ist. Die Hohlräume innerhalb der Objekte sind so konzipiert, dass zunächst die Fläche unterhalb des Funktionsgraphen gefärbt ist (Abb.4 links). Wird ein Verschlussstopfen entfernt, so öffnet sich eine zweite Kammer und das Wasser mittelt sich auf einer bestimmten Höhe. Damit ist ein zur Fläche unter dem Graphen flächengleiches Rechteck entstanden.

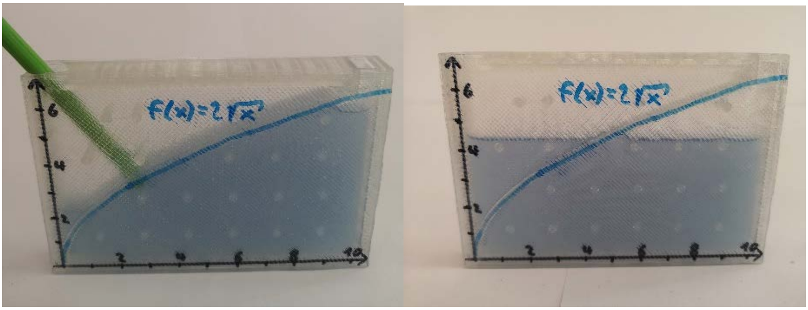


Abb. 5: Arbeitsmaterial zum Mittelwert am Beispiel der Funktion $f(x)=2\sqrt{x}$

Das Prinzip lässt sich auf Funktionen mit negativen Funktionswerten Übertragen. Eine negativ orientierte Fläche, also eine solche, die zur Berechnung des Integrals negativ gewertet wird, ist dann eine Kuhle, in welche das Wasser zunächst hineinfließt, bevor es sich über die gesamte Fläche hinweg mittelt.

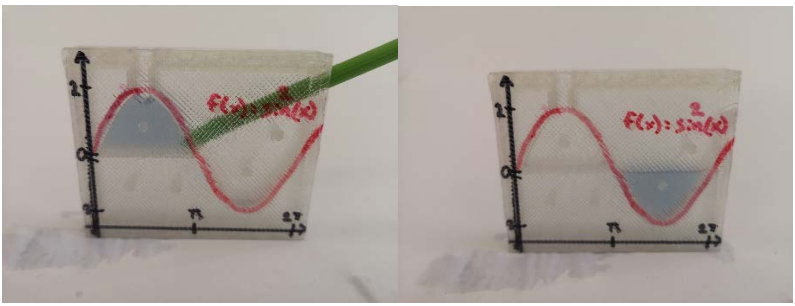


Abb. 6: Arbeitsmaterial zum Mittelwert am Beispiel der Funktion $g(x)=2\sin(x)$

Im Unterricht können Schülerinnen und Schüler mit dem Material eine Ankervorstellung für das Mitteln von Funktionen in einem bestimmten Intervall entwickeln. Auf den physikalischen Vorstellungen zum Verhalten von Flüssigkeiten kann dabei systematisch aufgebaut werden. Die Erstellung der Objekte mit einem CAD-Programm ist verhältnismäßig aufwändig, sodass sich die Entwicklung im Unterricht nicht anbietet. Stattdessen kann eine Lehrkraft entsprechende Objekte für das Arbeiten im Unterricht erstellen. Das Prinzip kann zudem auf Funktionen mit zwei Variablen übertragen werden, sodass sich die entwickelten Vorstellungen auch über den Mathematikunterricht der Schule hinaus als tragfähig erweisen. Insbesondere in Bezug auf die Grundvorstellungen des Integrals als Mittelwert sowie als Flächeninhalt lassen sich Verbindungen erkennen.

Rotationskörper

Rotationskörper stellen in der Schule eine häufig auftretende Anwendung der Integralrechnung dar. Im Mathematikbuch können die Objekte nur zweidimensional dargestellt werden, was häufig Vorstellungsprobleme bei den Schülerinnen und Schülern zur Folge hat. Mit Hilfe der 3D-Druck-Technologie können Anschauungsobjekte in diesem Bereich entworfen werden. Dies umfasst einerseits dreidimensionale Volumenkörper aus Kunststoff, die mit CAD-Software mit wenig Aufwand konstruiert werden können (Abbildung 7 rechts). Im Konstruktionsprozess wird bereits die Verbindung zwischen der den Rotationskörper begrenzenden Funktion und dem Rotationskörper selbst sichtbar. Das Volumen des entstehenden Volumenkörpers kann dann beispielsweise durch das Eintauchen in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß (Differenzmethode) bestimmt werden. Alternativ kann die Verbindung von berandender Funktion und dem entstehenden Rotationskörper auch mit einer in einen schnell drehenden Motor eingespannte Fläche veranschaulicht werden (Abbildung 7 links).

Abb. 7: Arbeitsmaterialien zum Thema Rotationskörper

Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag konnte am Beispiel der Integralrechnung aufgezeigt werden, wie die 3D-Druck-Technologie neue Ansätze zur Förderung der Entwicklung zentraler Begriffe der Mathematik bereitstellen kann. Die Entwicklung von Arbeitsmitteln gemeinsam mit Schülerinnen und Schülern und die anschließende Verwendung dieser in handlungsorientierten Lernumgebungen kann bereits existierende rein digitale Ansätze in diesem Bereich (z. B. Elschenbroich, 2017) erweitern. Der Einsatz der Technologie in Phasen der Begriffsentwicklung kann, wie verschiedene Untersuchungen zeigen (u.a. Dilling, 2019; Dilling et al., 2019; Pielsticker, 2020), die Begründung zentraler mathematischer Aussagen auf der Grundlage der empirischen Objekte anregen und damit zur Entwicklung einer empirischen Auffassung von Mathematik führen. Dies soll, auch für die in diesem Beitrag vorgestellten Beispielanwendungen aus der Integralrechnung, in weiteren Untersuchungen detailliert in den Blick genommen werden.

Literatur

Blum, W. (1982). Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion – Ein anderer Beweis des Hauptsatzes. *Mathematische Semesterberichte, 25* (1), 126-134.

Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer.

Dilling, F., Pielsticker, F., & Witzke, I. (2019, online first). Grundvorstellungen Funktionalen Denkens handlungsorientiert ausschärfen – Eine Interviewstudie zum Umgang von Schülerinnen und Schülern mit haptischen Modellen von Funktionsgraphen. *Mathematica didactica*.

Dilling, F. & Witzke, I. (2018). 3D-Printing-Technology in Mathematics Education – Examples from the Calculus. *Vietnam Journal of Education, 2* (5), 54-58.

Dilling, F. & Witzke, I. (2019a, erscheint). Was ist 3D-Druck? Zur Funktionsweise der 3D-Druck-Technologie. *Mathematik Lehren, 217*.

Dilling, F. & Witzke, I. (2019b, erscheint). Ellipsograph, Integraph & Co. Historische Zeichengeräte im Mathematikunterricht entwickeln. *Mathematik Lehren, 217*.

Elschenbroich, H.-J. (2017). Anschauliche Zugänge zur Integralrechnung mit dem Integrator. *MNU Journal,*

Fastermann, P. (2016). *3D-Drucken. Wie die generative Fertigungstechnik funktioniert.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In: Hoppenbrock, A. et al. (Eds.). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (15-24). Wiesbaden: Springer.

Pielsticker (2020, erscheint). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht am Beispiel der 3D-Druck-Technologie.* Wiesbaden: Springer.

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. Journal Für Mathematik-Didaktik, 13(4), 345–364.

Witzke, I., & Hoffart, E. (2018). 3D-Drucker: Eine Idee für den Mathematikunterricht? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, 2015-2018.

Differentiographen, Integraphen und das spezifische Dreieck

Hans-Jürgen Elschenbroich

Im 19. bis Mitte 20. Jahrhundert gab es analoge mechanische Geräte, genannt Differentiograph und Integraph, mit denen man bei Vorliegen einer geeigneten Kurve graphisch und analog die Ableitungskurve bzw. die Stammfunktionskurve/ Integralkurve zeichnen konnte. Hier werden die mathematischen Grundideen dieser Geräte untersucht und es wird eine interessante Gemeinsamkeit entdeckt. Abschließend werden digitale Modellierungen von Differentiograph und Integraph vorgestellt und in den Mathematikunterricht eingeordnet.

Einleitung

Das Berechnen von Ableitungen, Ableitungsfunktionen und Stammfunktionen und das Berechnen von Integralen und Integralfunktionen gehört zu den Standardthemen des Mathematikunterrichts und der Anfängervorlesung. Die Ableitungsfunktionen und Stammfunktionen werden üblicherweise mit einem entsprechenden Kalkül ermittelt. Zeichnerische Methoden fristeten in Mathematik und Mathematikunterricht lange ein Randdasein. Und mechanische Geräte wie Differentiograph und Integraph wurden eher im Techniker- und Ingenieurbereich eingesetzt. Dabei sind sie Maschine gewordene Mathematik. Im Folgenden sollen derartige Geräte vorgestellt und ihre grundlegenden mathematischen Ideen untersucht werden.

Graphisches Differenzieren und Differentiographen

Ein gewinnbringender und leicht zu verstehender Ansatz zum graphischen Differenzieren stammt von Šolín (1872), siehe Strubecker & Steinbach (1966). Er setzt voraus, dass man graphisch in der Lage ist, hinreichend genau, z. B. mit einem Spiegellineal, im Punkt P eine Tangente t an den Graphen einer Funktion f zu zeichnen (Abb. 1). Es werden zunächst die Punkte $O = (0, 0)$ und $A = (-1, 0)$ konstruiert. Die Basis-Strecke $\overline{OA}$ hat so die Länge 1 (in der gewählten Längeneinheit). Dann wird eine Parallele zur Tangente t durch den Punkt A gezeichnet, die die y-Achse schneidet. Der Schnittpunkt wird von Šolín, Strubecker & Steinbach (1966) mit P_0 bezeichnet (wir werden ihn analog zur Integration mit B benennen). Der y-

Achsenabschnitt hat dann genau den Wert *y*‘ der Steigung der Tangente (weil im Steigungsdreieck *basis* = 1 ist). Überträgt man diesen Steigungswert in die y-Koordinate eines Punktes *P*‘ = (*x*, *y*‘), so hat man einen Punkt der Steigungskurve konstruiert. Für weitere Punkte *Q*, *R* auf dem Graphen von f verfährt man analog und erhält so diskrete Punkte der Ableitungskurve. Vergleichbares findet man auch in einem Schulbuch aus den 70er Jahren (siehe Abb. 2).

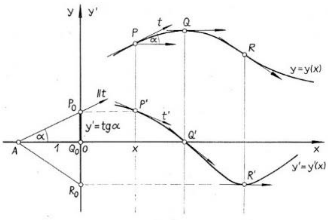


Abb. 1: Graphisches Differenzieren nach Šolín (Strubecker & Steinbach, 1966, S. 54)

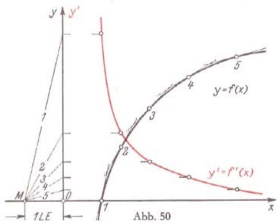


Abb. 2: Graphisches Differenzieren (Wörle, Kratz & Keil, 1975, S. 98)

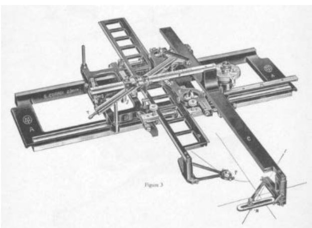


Abb. 3: Differentiograph Madrid-Coradi (Coradi, 1930)

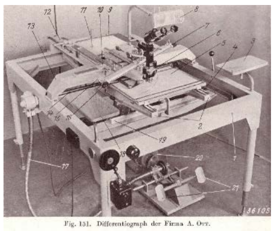


Abb. 4: Differentiograph Ott (Meyer zur Capellen, 1949)

Differentiographen sind mechanische Geräte, mit denen man zu einer gegebenen Kurve, die mit einem Führstift S abgefahren wird, kontinuierlich mit einem Zeichenstift Z eine Steigungskurve zeichnen kann. Hier werden zwei solcher Geräte gezeigt, die in den feinmechanischen Werkstätten Coradi (Schweiz) und Ott (Deutschland) hergestellt wurden (Abb. 3 und Abb. 4).

Graphisches Integrieren und Integraphen

Ausführungen zum graphischen Integrieren, die das Konstruktionsprinzip von Integraphen erklärten, finden wir bei Lossier (1911), die das Prinzip des Ende des 19. Jahrhunderts von Coradi gebauten Integraphen von Abdank-Abakanowicz erklären (Abb. 5). Wir sehen hier u. a. einen Rollwagen, einen Führstift, eine Basis (in unserer dynamischen Modellierung mit der Länge 1) und ein ‚Schneiderad', das stets parallel zur Tangente an die Integralkurve steht. Das Schneiderad (ein scharfkantiges Rädchen, das sich nur in eine vorgegebene Richtung bewegen kann) spielt hier eine entscheidende Rolle. Seine Richtung kann nur durch einen Gestängemechanismus, der den Wert f(x) abgreift, beeinflusst werden. So wird dafür gesorgt, dass der Zeichenstift sich immer nur in die ‚richtige' Richtung bewegt.

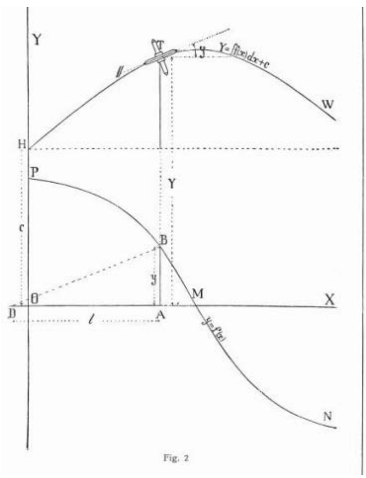


Abb. 5: Graphisches Integrieren und Prinzip eines Integraphen (Lossier, 1911)

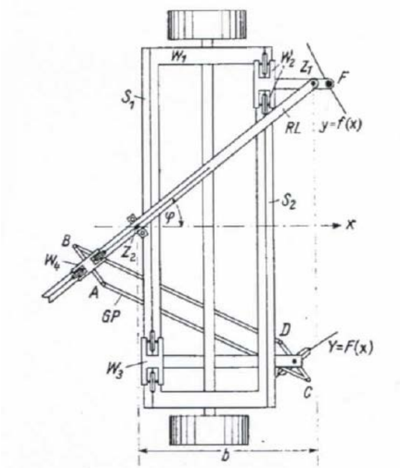


Abb. 6: Schematische Darstellung des Integraphen (Willers, 1942)

Das konstruktive Prinzip wird in Abb. 5 und Abb. 6 gezeigt, die Realisierung von Coradi als Gerät in Abb. 7. In Deutschland wurden dann Integraphen nach den Plänen des deutschen Ingenieurs Adler durch das

'Mathematisch-Mechanische Institut' der Firma Ott in Kempten hergestellt (siehe Abb. 8). Solche Integraphen waren – wie die Differentiographen auch –bis Mitte des 20. Jahrhunderts im technischen Bereich in Gebrauch und Verkauf. Sie wurden aber in den mathematischen Instituten nur am Rande und in den Schulen praktisch gar nicht wahrgenommen. Es sei an dieser Stelle schon angemerkt, dass in den Beschreibungen der Integraphen in der Regel vom Zeichnen der *Integral*kurve gesprochen wurde. Von der Konstruktion her ging es aber offensichtlich um das Zeichnen einer bestimmten *Stammfunktions*kurve (Startwert = 0), was mathematisch nahe beieinander, aber nicht dasselbe ist. Der feine Unterschied scheint damals keine große Rolle gespielt zu haben.

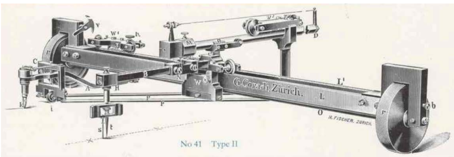


Abb. 7: Integraph Abdank-Abakanowicz (Coradi, 1935)

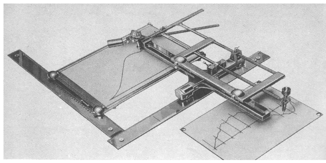


Abb. 8: Integraph Adler-Ott (Gellert et al., 1967)

Differenzieren und Integrieren mit GeoGebra

Nach dem Differenzieren und Integrieren von Grundfunktionen wurden in der Mathematik Regeln für kompliziertere, zusammengesetzte Funktionen entwickelt. Für den Einsatz von Differentiographen und Integraphen war dies aber nicht nötig, hier brauchte man neben dem Gerät nur die Grundkurve, den Graphen der Ausgangsfunktion f. Auch beim Differenzieren und Integrieren mit digitalen Werkzeugen wie GeoGebra bräuchten wir heute (scheinbar) keine Regeln mehr (jedenfalls auf der Benutzeroberfläche, wenn man akzeptiert, dass GeoGebra intern diese Regeln implementiert hat). GeoGebra bietet einen Graphikrechner (GR) und ein Computeralgebrasystem (CAS), beides verschmilzt zunehmend:

Ableitung in GR oder CAS:
Eingabe ***f***,
Ausgabe mittels ***f'***.

Stammfunktion im GR-Modus (mit F(a)=0)**:**
Eingabe ***f***,
Berechnung von ***F*(x) = Integral(*f*)**,
Ausgabe mittels ***F*(x) – *F*(a)**.

Stammfunktion im CAS-Modus (mit F(a)=0)**:**
Eingabe ***f***,
Ausgabe mittels ***F*(x) – *F*(a)**.

Integralfunktion im CAS-Modus:
Eingabe ***f***,
Ausgabe mittels **Integral(*f*,*a*,*x*)**.

So gesehen bräuchte man dann heute auch keine Differentiographen und Integraphen. Dennoch kann die Beschäftigung mit ihnen einen didaktischen Nutzen haben und zum grundlegenden Verständnis von Differenzieren, Integrieren und ihrem Zusammenhang beitragen.

Dynamische Modellierung eines Differentiographen mit GeoGebra

Einen Differentiographen kann man mit GeoGebra zunächst einfach brute force[1] konstruieren. Man definiert eine Funktion f, legt einen Punkt S auf den Graphen und konstruiert eine Tangente t an den Graphen von f im Punkt S. Die Tangentensteigung sei m und $x_S = x(S)$ (Abb. 9). Für die Konstruktion der Tangente wird hier der mächtige GeoGebra-Befehl genutzt. Dann zeichnet der Punkt $Z_D = (x_S, m)$ die Ableitungskurve als Spur oder Ortslinie.

Wie schaut es dagegen aus, wenn wir das graphische Differenzieren nach Šolín betrachten? Zur Tangente t wird die Parallele $t1$ durch $A = (-1; 0)$ konstruiert. Diese schneidet die y-Achse bei B und die y-Koordinate von B lie-

1 Brute force ist ein Vorgehen mit ‚roher Gewalt', das ohne den Einsatz ausgeklügelter Algorithmen vorgeht.

fert den Wert der Steigung der Tangente und die *y*-Koordinate von Z_D (Abb. 10). Das orange schraffierte Dreieck AOB_D ist ein verschobenes Steigungsdreieck der Tangente an *S*.

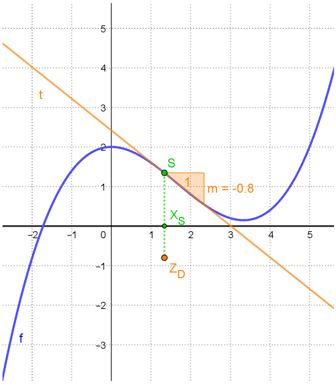


Abb. 9: Differentiograph ‚brute force‘

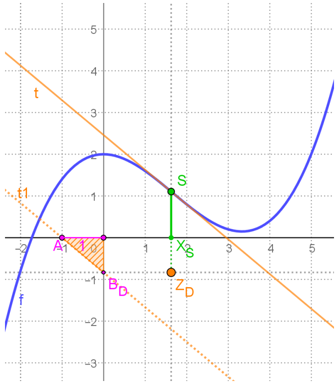


Abb. 10: Differentiograph nach Šolín, Konstruktionsprinzip mit Hilfslinien

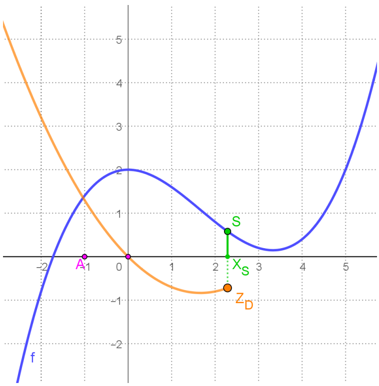


Abb. 11: Dynamischer Differentiograph nach Šolín, Hilfslinien versteckt

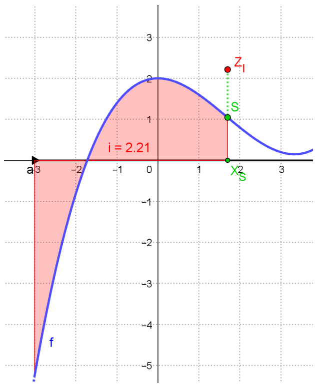


Abb. 12: Integraph ‚brute force‘

Wenn wir Z_D eine Ortslinie zeichnen lassen, kann man noch etwas trickreich erreichen, dass die Ortslinie nicht gleich über den gesamten Bereich gezeichnet wird, sondern nur bis x_S (Abb. 11). Damit haben wir einen dynamischen Differentiographen. Auf den ersten Blick scheint dies kein sonderlicher Unterschied zum ‚brute force' Ansatz zu sein. Interessant wird es dann aber bei der Untersuchung des Integraphen und dessen Prinzipien.

Dynamische Modellierung eines Integraphen mit GeoGebra

Auch einen Integraphen kann man mit GeoGebra einfach ‚brute force' konstruieren. Man definiert eine Funktion f, legt einen Punkt S auf den Graphen und berechnet mit dem GeoGebra-Befehl $i = Integral(f, a, x_S)$. Dann zeichnet der Punkt $Z_I = (x_S, i)$ die Integralkurve als Spur oder Ortslinie (Abb. 12).

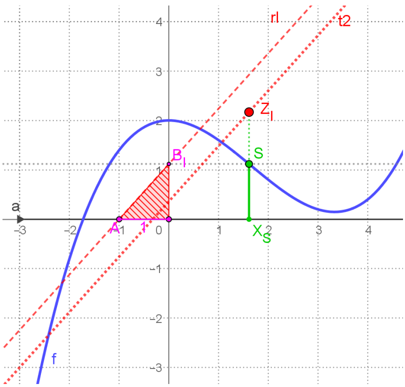


Abb. 13: Integraph nach Abdank-Abakanowicz, Konstruktionsprinzip mit Hilfslinien (siehe Coradi, 1935)

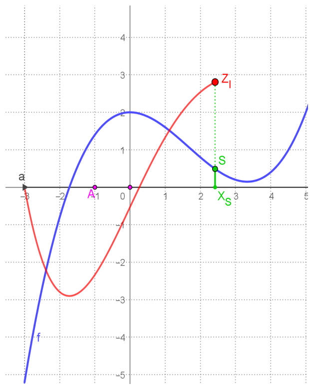


Abb. 14: Dynamischer Integraph nach Abdank-Abakanowicz, Hilfslinien versteckt (Elschenbroich, 2019)

Betrachten wir nun das Prinzip des Integraphen von Abdank-Abakanowicz aus dem Jahre 1886. Hier wird die y-Koordinate von S auf die y-Achse übertragen und erzeugt dort den Punkt B_I. Zur Geraden rl durch A und B_I (beim Gerät das Richtlineal) wird eine Parallele durch Z_I konstruiert, die Tangente $t2$ an die Integralkurve sein soll (Abb. 13). Beim Gerät wird dann über ein Parallelgestänge die Richtung des Schneiderads geändert. Damit wird erzwungen, dass der Zeichenstift immer passend in dieser Richtung weiterzeichnet. Das rot schraffierte Dreieck AOB_I ist hier ein verschobenes Steigungsdreieck der Tangente an Z_I (an der hier noch nicht sichtbaren Integralkurve). Auch hier können wir erreichen, dass die Ortslinie von Z_I nicht über den ganzen Bereich geht, sondern jeweils nur bis x_S gezeichnet wird (Abb. 14).

Spezifisches Dreieck 1. und 2. Art

Wir haben in beiden Fällen ein verschobenes und normiertes Steigungsdreieck AOB_D bzw. AOB_I. mit *basis* = $\overline{OA}$ = 1. Einmal wird B_D als Schnittpunkt über die Tangente *t* und die Parallele *t1* variiert. Das andere Mal wird B_I über den Punkt *S* variiert und die Gerade $rl = AB_I$ dadurch bewegt. Weil diese beiden Dreiecke jeweils das spezifische Verhalten des Zeichenstifts Z_D bzw. Z_I festlegen, nenne ich sie spezifisches Dreieck 1. Art bzw. 2. Art.

Zur Konstruktion des digitalen Integraphen

Eine Sache ist noch zu klären: *Wenn* wir *einen* Punkt Z_I der Integralkurve haben, *dann* können wir den nächsten Punkt konstruieren. Um das digital zu realisieren, definieren wir eine sehr kleine Variable *h*, gehen von Z_I aus um *h* nach rechts und dann bis zur Tangente *t2* nach oben / nach unten. Damit erhalten wir den nächsten, neuen Punkt Z_I. Und da die Kurve bei *a* auf der *x*-Achse mit (*a*; 0) startet, hat das Verfahren einen wohldefinierten Anfang. Diesen Schritt im sehr kleinen Bereich kann man mit der Funktionenlupe sichtbar machen (Abb. 15).

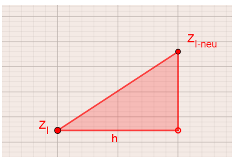


Abb. 15: Schrittweise Konstruktion von Z_I

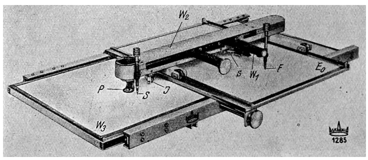


Abb. 16: Differentio-Integraph nach v. Harbou, Askania (Meyer zur Capellen, 1949)

Ein dynamischer Differentio-Integraph

Wenn man den Führstift eines Integraphen auf einer Grundkurve, dem Graphen von f zieht, erzeugt der Zeichenstift die Stammfunktionskurve / Integralkurve. Wenn man nun den Führstift eines Differentiographen auf ***dieser*** Kurve zieht, erzeugt der Zeichenstift deren Ableitungskurve und damit die vorherige Grundkurve (sofern *f* einigermaßen gutartig = stetig ist). Man kann das mechanisch so verstehen, dass die Rolle von Führstift und Zeichenstift vertauscht wird. In der Tat gab es sogar ein Gerät von v. Harbou, produziert von der Firma Askania, mit dem Namen Differentio-Integraph, das beide Funktionsweisen einnehmen konnte (Abb. 16).

Bei den mechanischen Geräten hatten wir immer *zwei* Blätter mit je einer Kurve (Grundkurve und Ableitungskurve bzw. Grundkurve und Integralkurve), auf denen Führstift *S* bzw. Zeichenstift *Z* laufen (und damit auch zwei Koordinatensysteme, die in der *x*-Achse zueinander passen).

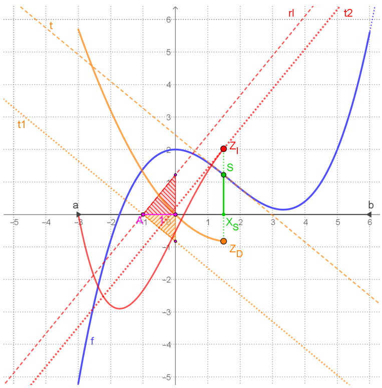


Abb. 17: Dynamischer Differentio-Integraph mit beiden spezifischen Dreiecken

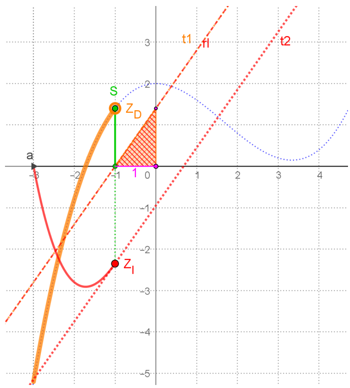


Abb. 18: Die Ableitungskurve der Integralkurve ist die Grundkurve.

In GeoGebra haben wir gegenüber den historischen Geräten die Möglichkeit, zu einer Funktion *f* und einem Punkt *S* zwei Zeichenstifte zu konstruieren, für die Ableitungskurve und für die Stammfunktions- bzw. Integralkurve. Wir können diese Kurven zusammen mit *f* wahlweise oder gleichzeitig in ein Zeichenblatt zeichnen. Damit können wir einen dynamischen Differentio-Integraphen konstruieren (Abb. 17).

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Was passiert, wenn wir nun erst den Integraphen einsetzen und damit die Integralkurve erzeugen und danach den Differentiographen auf den Punkt Z_I der Integralkurve anwenden? Dann fällt der Zeichenstift Z_D mit dem Punkt S zusammen und die bis dahin gezeichnete Kurve mit dem Graphen von f (Abb. 18). Auch fallen die beiden spezifischen Dreiecke AOB_D und AOB_I zusammen.

Dass die Ableitung der Stammfunktion wieder die Ausgangsfunktion f ergeben muss, ist das für den Mathematiker eher trivial. Aber für Schüler ist das doch ein Aha-Effekt. Dies ist die Veranschaulichung der globalen Aussage des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung (HDI), bekannterweise nur für geeignete, gutartige (= stetige) Funktionen. Der typische Beweis des HDI hilft Schülern zum Verständnis nicht wirklich weiter, weil er ‚wie auf Schienen' durchläuft.

Viel spannender als ein Beweis, der bei der Voraussetzung der Stetigkeit von f ‚glatt' durchgeht, ist eine Untersuchung, was passiert, wenn f eine Sprungstelle hat (Abb. 19), und was dann passiert, wenn man diese Sprungstelle behebt (Abb. 20). Dafür eignet sich die Kombination von Integraph und Funktionenlupe (Elschenbroich, 2015) besonders. Hierbei ist der ‚brute force' Integraph von Vorteil, weil er tatsächlich eine Integralkurve erzeugt, die ja auch bei einer Sprungstelle von f (bzw. bei endlich vielen) existiert. Hier lässt sich mit der Funktionenlupe dynamisch verfolgen, wie das Beheben der Sprungstelle von F die nicht-differenzierbare ‚Knickstelle' der Integralfunktion ‚glättet' (Abb. 20, Abb. 21).

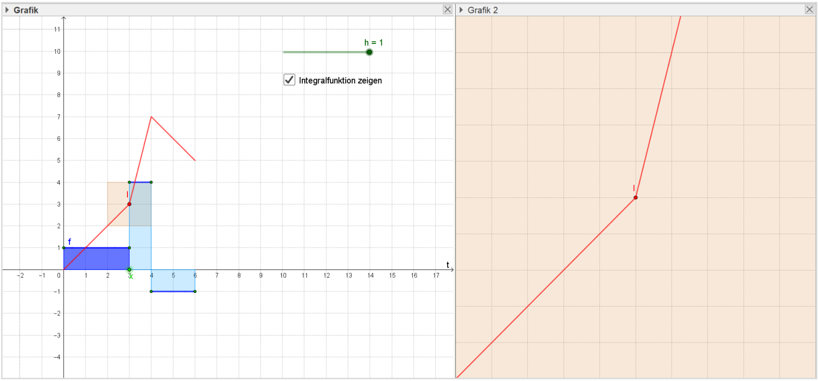


Abb. 19: Nicht-differenzierbare ‚Knickstelle' der Integralfunktion bei einer Sprungstelle von f

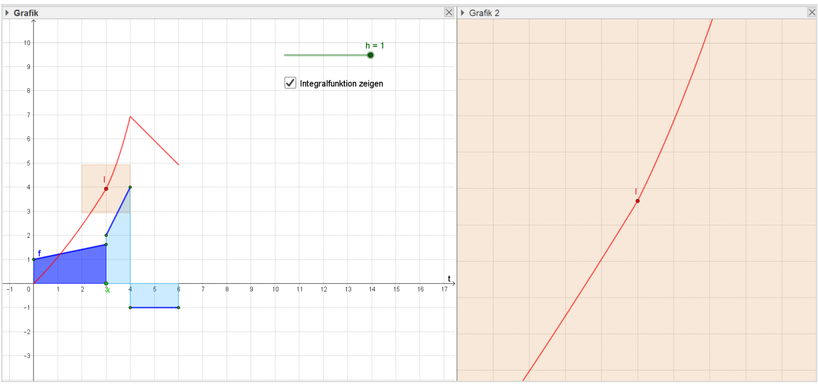


Abb. 20: Sukzessive Behebung der Sprungstelle von *f* und der Knickstelle der Integralfunktion

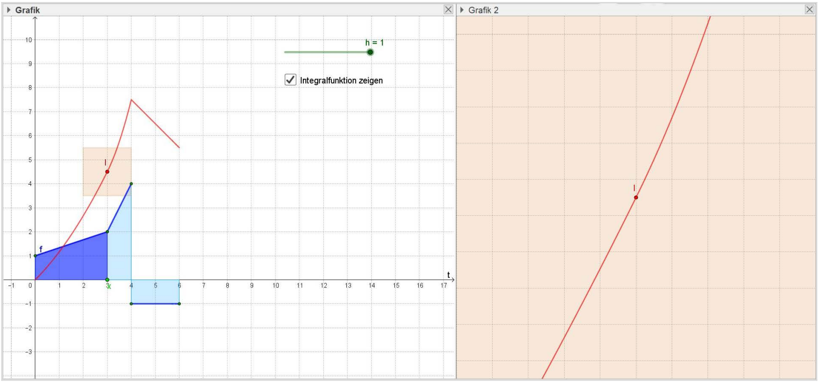


Abb. 21: Differenzierbarkeit der Integralfunktion nach Behebung der Sprungstelle von *f*

Integralfunktion – Stammfunktion

Der Differentiograph zeichnet die Ableitungskurve einer geeigneten Funktion *f*. Der ‚brute force' Integraph zeichnet exakt die *Integral*kurve. Der historische Integraph zeichnet von seiner Konstruktion her die *Stammfunktions*-kurve einer geeigneten Funktion *f*, auch wenn in den Beschreibungen dazu immer von Integralkurve die Rede ist. D. h. die Unterscheidung und der Zusammenhang von Integralfunktion und Stammfunktion, die eigentlicher Inhalt des HDI ist, fällt unter den Tisch bzw. wird verwischt. Dies korrespondiert mit der unglücklichen Sprech- und Schreibweise, die Stammfunktion als ‚unbestimmtes Integral' zu bezeichnen und mit dem Symbol $\int f(x)\,dx$ zu belegen. Eine Gepflogenheit, der man in der Schule möglichst lange *nicht* nachkommen sollte (Blum, Elschenbroich & Krimmel, 2016).

Es gibt zumindest eine historische Stelle, in der der Zusammenhang zwischen Stammfunktionskurve und Integralkurve explizit angesprochen wurde. Wird zur Kurve *abcde* die Stammfunktionskurve *ABCDE* gezeichnet, so formuliert Coradi, dass die durch seinen Integraphen gezeichnete Kurve (die Stammfunktionskurve) dann auch Integralkurve sein muss (Coradi, 1935) und weist dies durch expliziten Rückgriff auf das bestimmte Integral unter der Kurve *abcde* nach (seine Fig. 1 in Abb. 22).

Gleichzeitig zeigt Coradi auch (bei stillschweigender Voraussetzung der Stetigkeit von *f*), dass die Steigung der Integralkurve in einem Punkt *T* (hier wird auch das Schneiderad mit eingezeichnet) gleich dem Funktionswert von *f* an der Stelle *t* ist (seine Fig. 2 in Abb. 23). Coradi war sich also des Unterschiedes zwischen Integralkurve und Stammfunktionskurve durchaus bewusst.

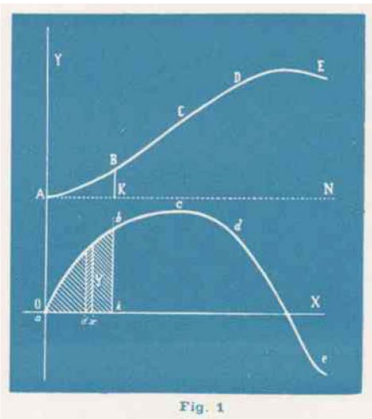


Abb. 22: Integralkurve (Coradi, 1935)

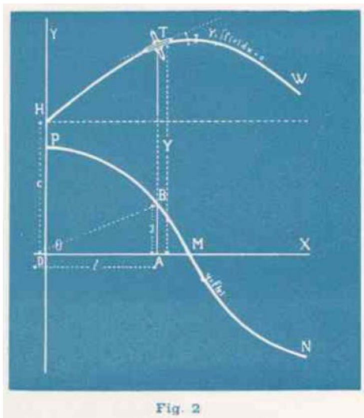


Abb. 23: Ableitungskurve (Coradi, 1935)

Mir ist nur eine einzige Veröffentlichung vor der Jahrtausendwende bekannt, die sich mit dem Integrator als Gegenstand des Mathematik*unterrichts* (dort mit dem Gerät Adler-Ott) an der Schule beschäftigte (Blum 1982; und mit ihm Dröge & Metzler 1983). Blum formuliert dort, dass der Integraph vom Prinzip her ein Stammfunktionszeichner, von der Wirkungsweise her aber ein Flächeninhaltszeichner ist, und er nennt den historischen Integraphen daher eine ‚Hauptsatzmaschine'.

Fazit

Heutzutage findet man in aktuellen Analysis-Schulbüchern keine graphischen Methoden mehr. In früheren Schulbüchern der 50er bis 70er Jahre war das durchaus anders. Dort war graphisches Differenzieren und graphisches Integrieren noch ein Thema, dem ggf. sogar ganze Kapitel gewidmet wurden.

Die historischen Geräte Differentiograph und Integraph sind materialisierte Mathematik, aber teilweise nicht leicht zu durchschauen und vor allem de facto im Unterricht nicht zugänglich.

Ein Blick zurück in alte Quellen hilft zunächst, die Grundideen und die analogen Geräte zu verstehen und einzuordnen. Digitale Lernumgebungen lassen dann diese Ideen und die historischen Geräte wieder auferstehen und ermöglichen einen direkten und visuellen Zugang. Die Schüler können sich dabei mit den Prinzipien dieser Verfahren und Geräte beschäftigen und ihr Verständnis der Analysis vertiefen. Sie können die digitalen Lernumgebungen aber auch zum Erkunden der Ableitungsfunktionen, Stammfunktionen & Integralfunktionen nutzen.

Die Beschäftigung mit historischen Geräten wie Differentiograph und Integraph soll die Ableitungs- und Integrationsregeln nicht überflüssig machen, sondern zum frühzeitigen/ rechtzeitigen Aufbau von Grundverständnis beitragen. Dies ist eine wichtige Aufgabe, die eigene Anstrengungen erfordert und nicht durch das routinierte Beherrschen der Regeln ersetzt werden kann!

Literatur

Blum, W. (1982): Der Integraph im Analysisunterricht – ein altes Gerät in neuer Verwendung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Jg. 14. Stuttgart: Klett, S. 25 – 30

Blum, W., Elschenbroich, H.-J. & Krimmel, K. (2016): Das Integral wirklich verstehen. In: mathematik lehren 199. Friedrich Verlag, S. 37 - 42

Coradi, G. (ca. 1935): Intégraphes. Inventés par Abdank-Abakanowicz, construits par institut mécano-mathématiques G. Coradi. G. Coradi, Zurich. www.mathinstruments.ch/pdf/coradi_ca1935_integraphes.pdf

Coradi, G. (ca. 1930): Differentiator invented by Mier Madrid. G. Coradi, Zurich. www.mathinstruments.ch/pdf/coradi_ca1930_differentiator.pdf

Dröge, W. & Metzler, W. (1983): Die »Hauptsatzmaschine« - Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Film C 1489. Göttingen: Institut für den wissenschaftlichen Film.

Elschenbroich, H.-J. (2015): Die interaktive Funktionenlupe – Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, Bd. 1. Münster: WTM, S. 264 - 267

Gellert, W., Küstner, H., Hellwich, M. & Kästner, H. (1967): Großes Handbuch der Mathematik. Köln, Buch und Zeit, T 44

Lossier, Henry (1911): Der Integraph. Coradi, Zurich. www.mathinstruments.ch/pdf/lossier_1911_der_integraph_abdank_abakanowicz.pdf

Meyer zur Capellen, W. (1949): Mathematische Instrumente. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. S. 175 und S. 237

Strubecker, Karl & Steinbacher, Erwin (1966): Graphische und numerische Methoden der angewandten Mathematik. In: Behnke, H., Bertram, G. & Sauer, R.: Grundzüge der Mathematik. Band IV. Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, S. 54

Willers, F. A. (1942): Grundintegraphen und Differentiographen. In: ATM Archiv für technisches Messen und industrielle Meßtechnik. München: Oldenburg, S. 221 – 224

Wörle, Karl; Kratz, Johannes & Keil Karl-August (1975): Infinitesimalrechnung, 10. Auflage. München: Bayerischer Schulbuchverlag, S. 98

Link

Elschenbroich, H.-J. (2019): GeoGebra-Dateien zum Vortrag auf dem GDM AK Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge, Heidelberg 28.9.2019. www.geogebra.org/m/pqwdqz8p

Adaptives Online-Training für mathematische Übungsaufgaben

Gerhard Götz, Sebastian Wankerl

Wir stellen das Konzept und erste empirische Ergebnisse eines adaptiven Online-Trainings für Arithmetikaufgaben auf der Online-Plattform optes für Nutzer in der Vorstudienphase vor. Dort wird ein Algorithmus genutzt, der zunächst auf Basis eines fachdidaktischen Modells des Wissens und Könnens Aufgaben empfiehlt, die auf den einzelnen Nutzer individuell optimiert sind. Mit zunehmender Nutzerzahl soll das Vorschlagsystem dazu lernen und die Vorhersagen verbessern, indem es Erkenntnisse über Nutzer und Trainingsaufgaben sukzessive mit integriert.

Einleitung

Das hier vorgestellte adaptive Training wird im mathematischen Online-Brückenkurs des vom BMBF geförderten Projekts optes (Optimierung der Studieneingangsphase) genutzt. Dieser bietet sechs lernzielorientierte Kurse (LOC) zu den Themen Arithmetik, Gleichungen, Potenzen-Wurzeln-Logarithmen, Funktionen, Geometrie und Trigonometrie an, die den angehenden Studierenden den Übergang zwischen Schule und Hochschule erleichtern sollen. Die Konzeption und Umsetzung der darin eingesetzten adaptiven Trainings fand anhand von sechs Forschungsfragen statt. Drei davon beschäftigen sich mit Aspekten der Fachdidaktik der Mathematik:

1. Was zeichnet Adaptivität in einem Mathematik-Onlinekurs aus?
2. Wie sieht ein summatives Modell zu grundlegendem Wissen und Können in der Arithmetik aus?
3. Wie kann ein summatives Modell des Wissens und Könnens ein adaptives Vorschlagsystem für mathematische Übungsaufgaben konzeptionell unterstützen?

Weitere drei Forschungsfragen sind aus dem Bereich Machine Learning:

4. Wie konzipiert man ein selbstlernendes Empfehlungssystem für Kleinstdatensätze?
5. Wie lässt sich ein summatives Modell des Wissens und Könnens als Ontologie in einen selbstlernenden Algorithmus einbinden?

6. Welche Erkenntnisse lassen sich aus einer Pilotdurchführung ableiten?

Adaptivität in einem Online-Kurs

Der ersten Forschungsfrage beschäftigt sich damit, was Adaptivität in einem Mathematik-Onlinekurs bedeuten kann. Dieser nähern wir uns mit folgendem Definitionsversuch an: Ein auf das Üben von Aufgaben ausgelegter Mathematik-Onlinekurs reagiert automatisch und individuell auf die Nutzerinteraktion „Beantwortung einer Übungsaufgabe“ in einem dediziertem Aufgabentraining. Der generische Prozessablauf eines Nutzers auf der optes-Plattform ist in Abbildung 1 (Roos et al. 2019) dargestellt.

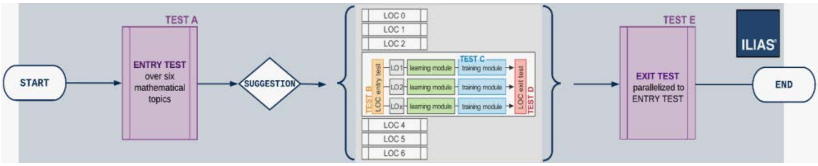


Abb. 1: Generischer Prozessablauf eines Nutzers bei optes [Roos et al. 2019]

Die erste Nutzerinteraktion nach der Registrierung auf der Plattform ist die Durchführung des Eingangstests A mit 37 Items, dessen Ziel eine Bestandsaufnahme sowie eine Selektion der für einen Nutzer empfohlenen LOCs darstellt. In jedem ausgewählten LOC findet anschließend ein themenspezifischer Eingangstest B statt. Beide Tests (A und B) sind für alle Teilnehmer identisch, ordnen die Aufgaben aber in einer beliebigen Reihenfolge an, um die Auswirkung einer möglichen Testmüdigkeit nicht als Artefakt bei denselben Fragen zu manifestieren. Diese klassischen Testungen generieren für alle Nutzer identische Trainingsdaten, die für den anschließend in Test-Training C genutzten Adaptionsalgorithmus zur Verfügung stehen. Dieser empfiehlt einem Nutzer auf Basis der zuvor beantworteten Aufgaben jeweils individuell eine neue passende Aufgabe und verweist bei Bedarf auf erklärende Glossar- und Textbeiträge innerhalb der Plattform zu allen wesentlichen Themen und Begriffen. Abschließend findet eine Evaluation der Studierenden am Ende des LOCs mit Tests D

(LOC-Abschlusstest parallelisiert zu Test B) bzw. mit Test E (finaler Kontrolltest parallelisiert zu Test A) am Ende der Beschäftigung mit der Plattform statt, um mögliche Erfolge der genutzten Intervention feststellen zu können. Wir verzichten bewusst darauf, die Adaption bereits in den Tests A und E bzw. B und D zu nutzen, da diese in eine Pre-/Posttestsetting eingebettet sind und Vergleiche sich durch eine adaptive Testung (Moosbrugger et al 2012) unnötig erschweren. Außerdem generieren die Tests eine ausreichende Menge an für alle Nutzer überlappende Daten, die beim Antrainieren des Algorithmus von großem Vorteil ist. Die Trainings C innerhalb eines jeden LOCs erscheinen uns aus diesen Gründen genau der richtige Platz für ein direkt auf den Nutzer reagierendes System zu sein.

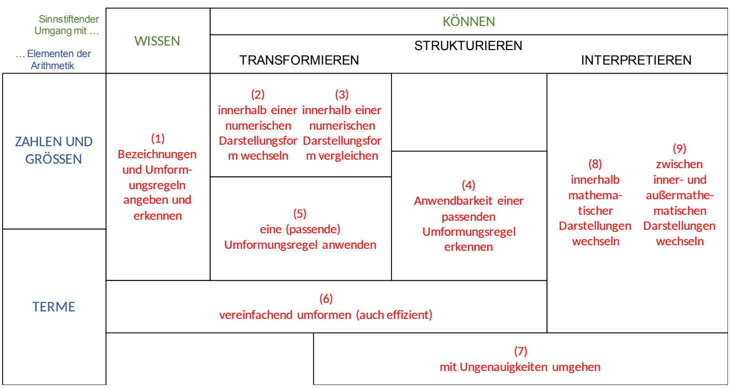


Abb. 2: Summatives Modell des Wissens und Könnens für Arithmetik [Schönwälder 2019]

Summatives Modell zu grundlegendem Wissen und Können

Bei der zweiten Forschungsfrage geht es um die konkrete Gestalt eines summativen Modells zu grundlegendem Wissen und Können. Dieses ist eine summative Zerlegung eines Themengebiets in fachdidaktisch motivierte Aspekte (Malle 1993; Hußmann et al. 2007; Duval 2006), das zugleich umfassend und prägnant konzipiert ist (Pinkernell et al. 2015; Pinkernell et al. 2017). Das Modell ist durch eine systematische Literaturrecherche (Siddaway 2014; Hamich 2019) inhaltsvalidiert und soll einen sinnstiftenden Umgang mit Elementen des Inhaltsbereichs – hier: Sekundarstufenarithmetik – in seinen wesentlichen Anforderungen abbilden. In unserem Fall dient es auch als Referenzmodell für eine differenzierte Konzeption von Trainings- und Testaufgaben (Winter 2011). Das entsprechende Modell für den Fachbereich Arithmetik (Schönwälder 2019; Schönwälder et al. 2019) ist in Abbildung 2 dargestellt.

Konzeption des adaptiven Aufgabentrainings basierend auf dem summativen Modell des Wissens und Könnens im Bereich Arithmetik

Bei der grundlegenden Konzeption der Trainings gehen wir Forschungsfrage drei nach. Der für alle Nutzer identische Eingangstest A liefert überlappende Informationen für alle Nutzer, welche für den später beschriebenen Algorithmus aufgrund der geringen Nutzerzahl eine essentielle Rolle spielt. Insbesondere werden alle Aufgaben den obigen Aspekten des Modells zu grundlegendem Wissen und Können zugeordnet. Und wenn eine zugehörige Aufgabe nicht gelöst werden kann, dann ist dies ein Indiz dafür, dass dieser und benachbarte Aspekte noch der Übung bedürfen. Der Algorithmus empfiehlt daher zunächst auf Basis dieses fachdidaktischen Modells eher ähnliche Aufgaben und sobald eine ausreichende Menge an Nutzerdaten gesammelt wurde wird der Algorithmus auf Basis eines künstlichen neuronalen Netzes verfeinert und optimiert, so dass sich die Empfehlungen in gewisser Weise auch von den Modellannahmen lösen kann.

Forschungsfrage vier beleuchtet die Herausforderungen, die sich aus der geringen Datenmenge ergeben. Folgende Betrachtung soll dies für einen Algorithmus im gegebenen Kontext verdeutlichen: Während selbstlernende Algorithmen auf Basis großer Datensätze)Drachsler et al. 2019; Zhang et al. 2019) mit mindestens einer Million Nutzerinteraktionen entwickelt werden, können wir nur maximal 10000 Nutzerinteraktionen in Form von beantworteten Fragen erwarten. Jedoch sind unsere Datensätze deutlich dichter besiedelt, da bei 130 Aufgaben und durchschnittlich 15 bis 25 beantworteten Fragen die Chance viel größer ist, dass zwei Nutzer dieselbe

Aufgabe gelöst haben. Um den Nutzern aber bereits zu Beginn gut geeignete Aufgaben vorschlagen zu können geschieht dies stochastisch-regelbasiert auf Basis des didaktischen Modells. Im Laufe der Zeit geht dann das System von diesen a priori Ontologien über zu einem automatischen Clustern der Aufgaben. Andere regelbasierte Ansätze wie die Bewertung der Häufigkeiten von Klickpfaden (Henning et al. 2014) sind zwar grundsätzlich sehr spannend, sind für unsere Fragestellung jedoch keine validen Lösungswege für ein dediziertes Aufgabenvorschlagsystem.

Die Antwort auf Forschungsfrage fünf ist eine Einbindung des summativen Modells in Form eines assoziierten Graphen (Abbildung 3) als Ontologie in den selbstlernenden Algorithmus.

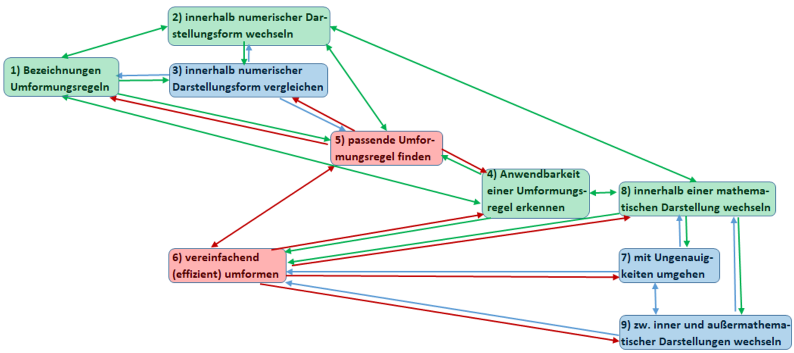


Abb. 3: Assoziierter Graph für den Fachbereich Arithmetik

Die Knoten des Graphen stellen die Handlungsaspekte dar und die gerichteten Kanten verstärkte Abhängigkeiten zwischen den beiden verbundenen Knoten, die immer beidseitig sind. Die Entscheidung darüber, ob eine direkte Kante auftritt wurde auf Basis der Zusammenhänge getroffen, die sich aus der empirischen Analyse der Eingangstestfragen bei einer Stichprobe von 200 Studierenden ergeben haben. Zur Vereinfachung werden die von einem Knoten ausgehenden Kanten nicht individuell gewichtet, sondern nach der Zielvorgabe einer gleichmäßigen Verteilung, die farblich kodiert ist. Alle Aspekte, von denen insgesamt drei direkte Kanten ausgehen sind ebenso wie die davon ausgehenden Kanten blau kodiert. Dies entspricht einer Verweilwahrscheinlichkeit in einem Aspekt von 55% (Selfloop) und einer Übergangswahrscheinlichkeiten von je 15% zu jedem direkt benachbarten Aspekt. Bei vier ausgehenden Kanten werden diese grün dargestellt (60% Verweil- und 10% Übergangswahrscheinlichkeit) und bei fünf ausgehenden Kanten werden diese rot dargestellt (50% Verweil- und 10% Übergangswahrscheinlichkeit). Besäße der Graph zwischen allen Aspekten direkte Kanten, würden sich die Abhängigkeiten zwischen 150 Fragen auf diejenigen zwischen 9 Aspekten reduzieren. Durch den assoziierten Graph werden diese noch zusätzlich ungefähr halbiert, die auch bei einem Zuwachs an Aufgaben gleich bliebe. Ein zweiter Graph unterscheidet sich nur in den Kantengewichten (Blau: 10% Verweil- und 30% Übergangswahrscheinlichkeit/ Grün: 10% Verweil- und 22,5% Übergangswahrscheinlichkeit/ Rot: 10% Verweil- und 18% Übergangswahrscheinlichkeit). D.h. während Graph 1 eher darauf abzielt, in einem Aspekt zu verweilen, aber trotzdem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Aufgaben aus einem benachbarten Aspekt einstreut zielt Graph 2 darauf ab, mit einer stärken Tendenz zu einem benachbarten Aspekt zu wandern.

Dies kann man aktiv für ein Vorschlagsystems mit folgendem Ziel nutzen: Ein Nutzer soll ähnliche Aufgaben (in Form eines ähnlichen didaktischen Aspekts) üben, grundlegende Aufgaben sollen berücksichtigen und zugleich soll vermieden werden, dass insgesamt zu viele Aufgaben und insbesondere zu viele ähnliche Aufgaben geübt werden. Als eine Startbasis wählen wir einen probabilistisch-regelbasierter Ansatz, der es aufgrund der geringen Datenbasis einerseits erlaubt, die Modelle des Wissens und Könnens zu berücksichtigen und es andererseits erlaubt, Erkenntnisse über die Nutzer durch Änderungen der Kantengewichte einfach einfließen zu lassen. Dies sieht dann wie folgt aus:

Bedingung A: Insgesamt sind maximal 40 Aufgaben bis zu einem umfassenderen Feedback der erbrachten Leistung zu bearbeiten.

Bedingung B: Mindestens drei Aufgaben eines Aspekts müssen mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von mindestens 60% bearbeitet worden sein.

Solange weder Bedingung A noch Bedingung B erfüllt sind wird Graph 1 (höhere Verweilwahrscheinlichkeit innerhalb eines Aspekts) zur Bestimmung des Aspekts der als nächstes vorgeschlagenen Aufgabe genutzt. Sobald Bedingung B für einen Aspekt erfüllt ist wird Graph 2 mit einer höheren Tendenz zu benachbarten Aspekten genutzt. Ist Bedingung A erfüllt so gibt es ein globaleres Feedback mit Empfehlung von Textpassagen (gesamte Lösewahrscheinlichkeit < 50%), gezielten Glossareinträgen (gesamte Lösewahrscheinlichkeit zwischen 50 und 70%) oder der Empfehlung zur Teilnahme am LOC-Abschlusstest (gesamte Lösewahrscheinlichkeit größer als 70%). Die Textpassagen zu einzelnen Lernzielen umfassen ungefähr 20 bis 30 Seiten und die Glossareinträge zu thematischen Begriffen wie etwa binomische Formeln umfassen je eine bis zwei Seiten. Das Trainingssystem ist flexibel und einfach gehalten, da das verwendete Illias-Plugin eine Trennung in einen Testplayers, dessen Aufgabe nur darin besteht, dem Nutzer einzelne Fragen anzuzeigen (Abbildung 4) und die gegebene Antwort an den Vorschlagalgorithmus weiterzuleiten und den Algorithmus erlaubt. Letzterer analysiert die gegebene Antwort in Abhängigkeit der vorherigen Antworten des Nutzers und auch anderer Nutzer und teilt dem Player mit, welche Aufgabe als nächstes angezeigt wird. Diese Aufteilung bietet den Vorteil, dass sich der Vorschlagalgorithmus bei Bedarf selbst im laufenden Betrieb z. B. durch Änderung der Kantengewichte leicht modifizieren lässt.

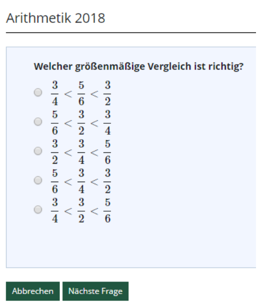


Abb. 4: Fragenscreen

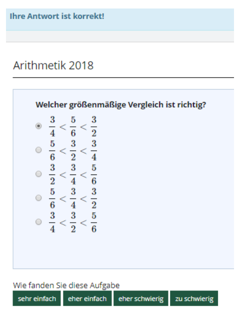


Abb. 5: Rückmeldescreen

Anschließend erhält der Nutzer über den Player die Angabe der richtigen Lösung und bei komplexeren Aufgaben einen ausführlichen Lösungsweg (Abbildung 5). Darüber hinaus darf ein Nutzer ein persönliches Votum zum gefühlten Schwierigkeitsgrad der Aufgabe abgeben, welche in die Auswertung und den Algorithmus mit eingespeist wird. Abhängig von der gewählten Antwortmöglichkeit zur letzten und den vorherigen Trainingsaufgaben schlägt der Algorithmus, der über eine sichere Verbindung die notwendigen Daten austauscht eine neue Aufgabe vor und beauftragt den Player, diese entsprechend darzustellen. Dabei berücksichtigt er die oben beschriebene Logik dargestellt durch die oben beschriebenen Graphen. Dies führt dann zur sechsten Forschungsfrage nach den Erkenntnissen aus einem Pilotdurchlauf.

Erkenntnisse aus der Pilotdurchführung

In einer ersten Pilotdurchführung, für welche 160 Studierende des ersten Semesters der Studienrichtung Bauwesen studienbegleitend eingeladen wurden, nahmen insgesamt 39 Nutzer teil. Die Verteilung, wie aktiv diese waren, ist in Abbildung 6 gezeigt. 24 davon eigneten sich für eine nähere Analyse, da sie jeweils mehr als zehn Trainingsaufgaben beantworteten. Auf die Durchführung der Tests A, B, C und D wurde in diesem Pilotsetting verzichtet, so dass sich die Studierenden maßgeblich mit den Trainings C beschäftigen konnten. Von den möglichen Daten wurden gezielt nur die Reihenfolge der bearbeiteten Fragen sowie die dichotome Aussage richtig oder falsch sowie die Bearbeitungsdauer pro Aufgabe genutzt. Die durchschnittliche Lösewahrscheinlichkeit, der subjektive Schwierigkeitsgrad sowie der Fehlertyp wurden zunächst nicht mit ausgewertet.

Zwei Erkenntnisgewinne aus den Daten sollen explizit erläutert werden. Betrachtet man die durchschnittlich Bearbeitungsdauer pro Aspekt (Abbildung 7), so sieht man eine Zunahme von Aspekt 4 („Anwendbarkeit einer passenden Umformungsregel erkennen“) über Aspekt 5 („passende Umformungsregel anwenden“) zu Aspekt 6 („vereinfachend umformen“), die sich auch in der theoretischen Konzeption des Modells durchaus nachvollziehen lässt.

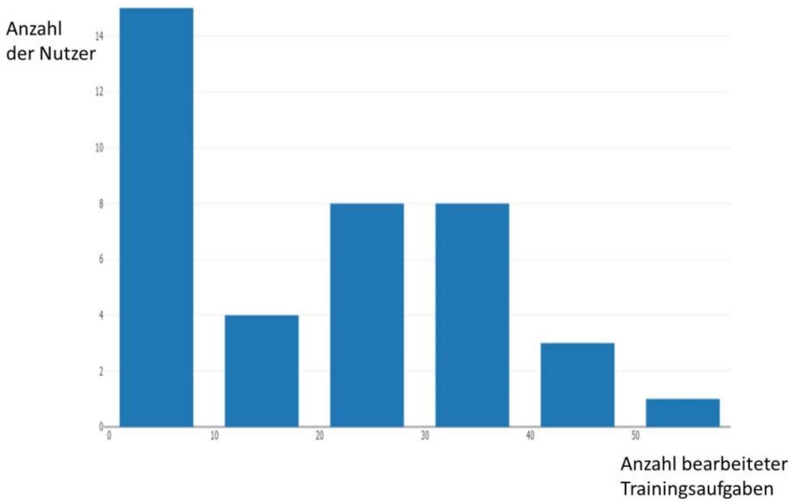


Abb. 6: Anzahl beantworteter Trainingsaufgaben pro Nutzer

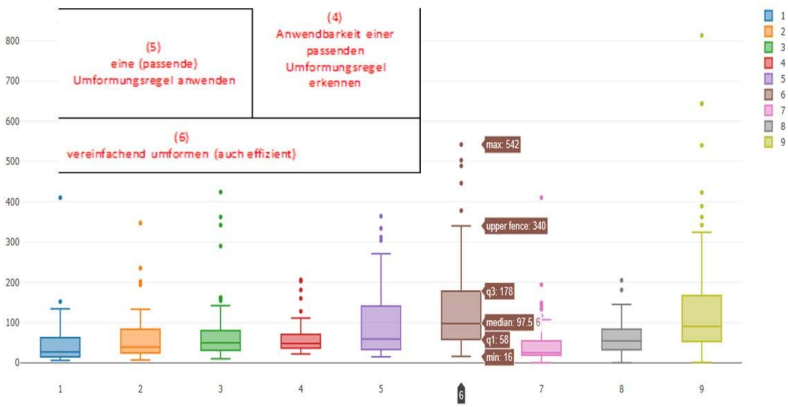


Abb. 7: Bearbeitungsdauer für eine Aufgabe in einem Aspekt

Darüber hinaus wurde dieser Kleinstdatensatz für Simulationen genutzt (Wankerl et al. 2019). Zunächst werden hierfür bei einem einzelnen Nutzer die letzten fünf Antworten abgetrennt und die vorherigen zusammen mit den Daten aller anderen Nutzer zum Trainieren des Systems genutzt. Ziel war es vorherzusagen, ob der Nutzer die einzelnen letzten fünf Aufgaben richtig oder falsch beantwortet. Die Bedeutung dieser Frage sei hier nur kurz begründet: Zukünftig möchten wir uns von einer fixen Anzahl von Trainingsaufgaben für alle Nutzer bis zum Feedback lösen und vielmehr die idealen Lernpfade finden. Darunter verstehen wir einen individuellen, möglichst kurzen Aufgabenpfad, der alle Bedingungen wie Abdeckung aller Aspekte, ausreichender Schwierigkeitsgrad bei passender durchschnittlicher Lösewahrscheinlichkeit der Aufgaben berücksichtigt. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass wir es für zielführend erachten, dass ein Nutzer viele Aufgaben gerade noch lösen kann, und genau dafür ist es wichtig, vorhersagen zu können, ob ein Nutzer eine Aufgabe beantworten kann. Simuliert wurde dies auf zwei Wegen, sowohl konventionell, als auch mittels eines neuronalen Netzwerks, und beide Ergebnisse waren trotz der geringen Datenbasis bereits erfolgsversprechend, da die Vorhersagen deutlich besser waren, als wenn man sich bei jeder Frage in die Richtung entschieden hätte, die für die Mehrheit der Nutzer gilt (Wankerl et al. 2019).

Ausblick

Bislang wurde nur sehr rudimentäre Informationen einer geringen Anzahl von Nutzern aktiv für die Analyse genutzt. Jedoch wurde das System ab Oktober 2019 für mehrere Themenbereiche erneut getestet. Unter anderem sollen insbesondere die Ergebnisse des Eingangstests A und des LOC-Eingangstests B mit berücksichtigt werden, einerseits, um den Algorithmus anzutrainieren, und andererseits erhoffen wir uns dadurch bei einer ausreichenden Nutzerzahl Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Nutzern zu gewinnen, was langfristig zu Nutzerprofilen führen könnte. Auch aus der Art einer falschen Antwort erhoffen wir uns mehr über den Fehlertyp zu erfahren, was dann bei der Aufgabenauswahl mit berücksichtigt werden kann. Schließlich werden uns auch die durchschnittliche Lösewahrscheinlichkeit in Kombination mit der subjektiven Schwierigkeitsbewertung der Nutzer interessante Aufschlüsse ermöglichen.

Außerdem planen wir, den Algorithmus durch ein gerade entstehendes Modell der Abhängigkeiten zwischen den Fachaspekten eines Inhaltsbereichs zu ergänzen. Aufgaben zu gewissen fachlichen Aspekten erfordern grundlegendes Wissen zu anderen fachlichen Aspekten, was zur Folge hat, dass eine sinnvolle Auseinandersetzung mit einer Frage es erfordert, dass man andere Fragen auch richtig beantworten kann. Wir erstellen derzeit entsprechende Abhängigkeitsmodelle, die dann in Ergänzung zu den fachdidaktischen Modellen des Wissens und Könnens zusätzliche Hilfe bei der präzisen Steuerung der nächsten Trainingsaufgabe bieten dürfte.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Drachsler, H., Verbert, K., Santos, O. C., & Manouselis, N. (2015). Panorama of recommender systems to support learning. In *Recommender systems handbook* (pp. 421-451). Springer, Boston, MA.

Hamich M. (2019): War das alles? Systematische Literaturrecherche am Beispiel einer theoriebildenden mathematikdidaktischen Arbeit. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 317-320). Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Münster. WTM-Verlag.

Henning, P. A., Forstner, A., Heberle, F., Swertz, C., Schmölz, A., Barberi, A., ... & Burgos, D. (2014). *Learning pathway recommendation based on a pedagogical ontology and its implementation in moodle* (pp. 39-50).

Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen–Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *49*(15), 1-8.

Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2012). Testtheorie und Fragebogenkonstruktion.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Pinkernell, G., Düsi, C., & Vogel, M. (2017). Aspects of proficiency in elementary algebra. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), Proceedings of CERME 10 (S. 464–471). Dublin: DCU Institute of Education & ERME.

Pinkernell, G., Elschenbroich, H. J., Heintz, G., Körner, H., Langlotz, H., & Pallack, A. (2015). Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen.

Roos, A. K., Götz, G., Weigand, H. G., & Wörler, J. (2019, February). OPTES+–A Mathematical Bridging Course for Engineers. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 41). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Schönwälder D. (2019). Arithmetikkönnen in der Studieneingangsphase – Ein summatives Referenzmodell zu grundlegendem Wissen und Können im Bereich der Arithmetik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 717-720). Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Münster. WTM-Verlag.

Schönwälder, D., Pinkernell, G., & Götz, G. (2019, February). Relevant aspects of proficiency in secondary school arithmetic for a successful start in STEM subjects. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 43). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Siddaway, A. (2014). How to do a systematic literature review and meta-analysis. Abgerufen 5. Dezember 2017, von https://www.stir.ac.uk/media/schools/management/documents/centregradresearch/How%20to%20do%20a%20systematic%20literature%20review%20and%20meta-analysis.pdf

Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit-und Fehleranalyse: didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment*. WTM, Verlag für Wiss. Texte und Medien.

Wankerl S., Götz G. & Hotho A. (2019). Solving Mathematical Exercises: Prediction of Student's Success. Erscheint in *Proceedings of the Conference on „Lernen, Wissen, Daten, Analysen"* 2019.

Zhang, Shuai, et al (2019). "Deep learning based recommender system: A survey and new perspectives." *ACM Computing Surveys (CSUR)* 52.1 (2019): 5.

Ein Schulspezifisches Integratives Medienkonzept für die German International School Boston

M. Müller, A. Weber, A. Seifried, S. Kohnert, M. Radke

Vor dem Hintergrund der Digitalisierung und der Debatte zum Digital-Pakt Schule, müssen deutsche Bildungseinrichtungen prüfen, ob ihre pädagogischen Medienkonzepte den aktuellen Anforderungen entsprechen. Ein Ansatz ist die Fokussierung auf ein Unterrichtsfach (z. B. Informatik). Ein anderer Ansatz ist ein Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM). Beide Konzepte können als die Ränder eines Kontinuums aufgefasst werden, indem weitere Medienkonzepte verortet werden können. Am Beispiel der International German School Boston (GISB) soll ein SIM beispielhaft beschrieben werden. Dabei ist die Operationalisierung des SIM u.a. im Mathematikunterricht von besonderem Interesse.

Einleitung

Die Bildungslandschaft ist in Bewegung. Insbesondere die Digitalisierung stellt die unterschiedlichen Akteure vor die verschiedensten Herausforderungen. Die Kultusministerkonferenz der deutschen Länder hat in einem Grundsatzpapier „Bildung in der digitalen Welt – Strategie der Kultusministerkonferenz" (KMK, 2016) verbindliche Kompetenzerwartungen zum Lernen mit digitalen Medien formuliert. Zum einen schafft das einen gewissen Rahmen für die medienpädagogische Arbeit, zum anderen müssen materielle, strukturelle und organisatorische Voraussetzungen geschaffen sein, damit die formulierten Ziele auch erreicht werden können. Mit der „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft – Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung" (BMBF, 2016) wird ein Weg beschrieben, wie der Bund die Schulen bei der digitalen Grundausstattung unterstützen kann. In einer gemeinsamen Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zur MINT-Bildung haben die beiden Fachverbände schon 2010 klar herausgestellt, dass digitale Bildung kein Selbstzweck sein kann, sondern das Primat der Pädagogik gilt (GDM u. MNU, 2010). Der Einsatz digitaler

Medien muss sich an den Lernzielen orientieren und vor dem Hintergrund des fachlichen Kompetenzerwerbs rechtfertigen lassen. Die Tragfähigkeit von Konzepten für den Unterricht ist aus fachlicher, fachdidaktischer und medienpädagogischer Perspektive zu bewerten. Anhand von fünf Leitfragen soll im Folgenden ein Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM) allgemein vorgestellt, eingeordnet und am Beispiel diskutiert werden.

Was heißt hier Medien?

Allgemein sind Medien einerseits kognitive und anderseits kommunikative Werkzeuge zur Verarbeitung, Speicherung und Übermittlung von zeichenhaften Informationen (Petko, 2014, S. 13). Das betrifft sowohl analoge als auch digitale Medien. Entscheidend ist die Eigenschaft des Mediums als Mittler zwischen Inhalt und Lernenden zu fungieren. Dies kann physisch als auch digital erfolgen (Rink & Walther, 2020, S. 7f.). Nach Rauh (2012, S. 39) bezeichnen digitale Medien technische Geräte zur Darstellung von digital gespeicherten Inhalten. Konkreter handelt es sich um elektronische Geräte, die Informationen digital speichern oder übertragen und in bildhafter oder symbolischer Darstellung wiedergeben (Pallack, 2018, S. 28). Spezielle digitale Medien sind digitale Mathematik-werkzeuge, deren primärer Zweck es ist, das mathematische Arbeiten zu unterstützen. Ähnlich verhält es sich mit digitalen Informatikwerkzeugen. Eine Übersicht gibt Tab. 1.

Warum braucht es ein Konzept?

Die Gesellschaft für Informatik spricht sich in dem Basispapier „Empfehlungen für ein Gesamtkonzept zur informatischen Bildung an allgemeinbildenden Schulen“ deutlich für ein Pflichtfach Informatik aus (GI, 2000, S. 7). Ebenso liegen ausgearbeitete Bildungsstandards für solch ein Schulfach Informatik vor (GI, 2008/ GI, 2016). Ein verbindliches Schulfach Informatik, das sowohl in der Sekundarstufe I und II jeden Schüler und jede Schülerin erreicht, entspricht klar einem fachspezifischen Medienkonzept. Diesem Standpunkt ist immanent, dass bestimmte

Medien	**Allgemein**	**Mathematik-spezifisch**	**Informatik-spezifisch**
An Beruf und Alltag orien-tiert	**Kommunikation** (Internet- und Netzwerkforen), **Präsentation** (PPT, Prezi, …), **Dokumentation** (in: Wort/ Audio/ Foto/ Video), **Recherche** (Internet)	**Tabellenkalkulation** (z. B. Excel), **Computeralgebra-Systeme** (z. B. Maple, Mathematica), **Statistiktools** (z. B. SPSS, R), Tools zur **Messwerterfassung** (z. B. C-LAB)	**Programmier-sprachen** (Java, Turbopascal, C++, Python) **Web-Development** (z. B. html, Java Script)
Didak-tisch orien-tiert	**Digitale Schul-bücher, Erklär-Videos, Tutorielle Systeme, Lernpfade, Lernumgebungen, Apps, Lernplattformen** (z. B. Moodle), **Audience Response Systeme**	**Dynamische Geometriesoftware** (z. B. GeoGebra, Ti-Nspire, CASIO ClassPad), **Funktionenplotter**, **Schulcomputer-algebra-Systeme** (z. B. GeoGebra, Ti-Nspire, ClassPad), **Stochastiktools** (z. B. Fathom, Tinkerplots, Ti-Nspire)	**Grafische Programmierumg ebungen** (z. B. Scratch), **First-Step-App-Development** (z. B. MIT App Inventor), **Educational-Robotics** (z. B. Lego Mindstorms)
		Digitale Mathematik-werkzeuge	**Digitale Informatik-werkzeuge**

Tab. 1: Übersicht zu digitalen Medien (vgl. Barzel, 2019, S. 2)
und Beispielen für digitale Mathematik- und Informatikwerkzeuge.

(informatische) Inhalte nur in einem eigenen Fach vermittelt werden können. Fächerverbindender oder fächerübergreifender Unterricht würde zu kurz greifen und der Notwendigkeit einer informatischen Bildung nicht gerecht werden.

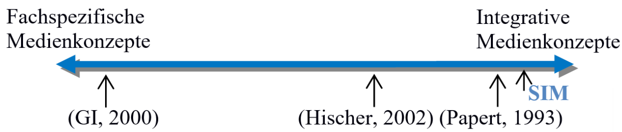
Dem gegenüber stehen integrative Medienkonzepte, die nicht nur das Arbeiten mit digitalen Medien in allen Fächern beleuchten, sondern einen übergreifenden medienpädagogischen Ansatz verfolgen. Nach Hischer (2002, S. 55) ist Medienpädagogik integrativ, wenn sie 1.) in ihrer Ganzheit bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht berücksichtigt und 2.) aufgrund der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen wird. Kurzum sind alle Unterrichtsfächer gefordert. In diesem Zusammenhang ist es interessant zu erwähnen, dass Papert (1993, S. 55) seine neue Geometrie klar als Art des mathematischen Arbeitens beschrieb und im Mathematikunterricht wiederfindet. Das Arbeiten mit einer grafischen Programmiersprache (wie z. B. Logo) würde aus seiner Sicht nicht ein neues Schulfach bedeuten, sondern kann im Mathematikunterricht erfolgen.

Es ist festzuhalten, dass ein Pflichtfach Informatik nicht die medienpädagogische Arbeit in anderen Fächern in Gänze ersetzen kann, genauso wenig wie eine integrative Medienpädagogik ein Schulfach Informatik ausschließt. Durch beide teilweise kontroversen Auffassungen wird ein Spannungsfeld aufgespannt, indem weitere Medienkonzepte, die einen fächerverbindenden oder -übergreifenden Ansatz haben, verortet werden können (siehe Abb.1). So kann das *Profilfach Informatik – Mathematik – Physik*[1] oder das baden-württembergische Wahlfach *Digitale mathematische Werkzeuge* in dem Spannungsfeld eingeordnet werden. Auch ein handlungsorientiertes Unterrichtskonzept wie die *MicroBerry-Lernumgebung*[2] findet sich zwischen den beiden Polen wieder.

1 siehe Höfer, T., Das Profilfach Informatik – Mathematik – Physik (IMP): Stellung, Genese und Ausgestaltungsmöglichkeiten, in diesem Band

2 siehe Schnirch, A., Die MicroBerry-Lernumgebung: Ein handlungsorientiertes Konzept zu Algorithmen im Informatikunterricht mit fächerübergreifenden Bezügen zum Mathematikun-

Abb. 1:



Spannungsfeld zwischen fachspezifischen und integrativen Medienkonzepten.

Ein Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM) kann klar dem einem Pol zugeordnet werden (siehe Abb. 1) und fußt damit auf allgemeineren integrativen Medienkonzepten (Hischer, 2002) sowie den Überlegungen von Papert (1993). Der Kompetenzerwerb mit und über digitale(n) Medien kann im SIM auf drei Stufen erfolgen. Abb. 2 zeigt dazu eine Übersicht.

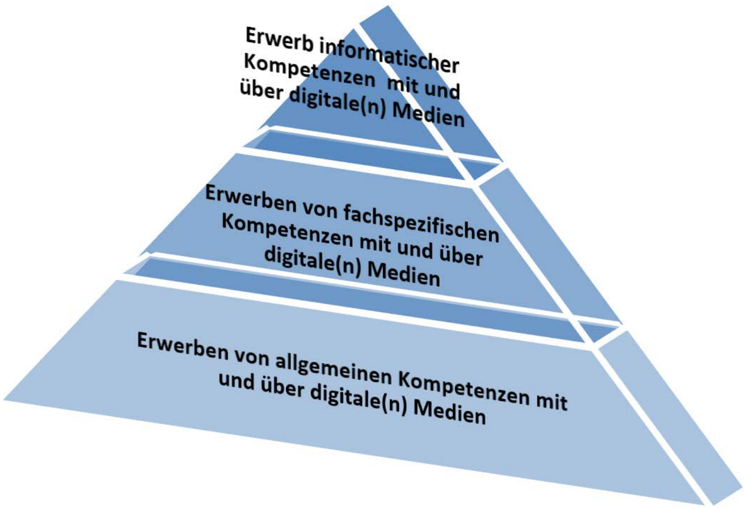


Abb. 2: Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM) – Allgemeiner Aufbau in drei Stufen: Lernende erwerben allgemeine Kompetenzen (I), fachspezifische Kompetenzen (II) und informatische Kompetenzen (II) mit und über digitale(n) Medien.

---

terricht, in diesem Band

Was ist die GISB?

Die German School Boston wurde 2001 von einer Gruppe Eltern und Pädagogen innerhalb der deutschsprachigen Community in Boston gegründet. Der Eröffnung ging eine vierjährige Planungs- und Organisationsphase voraus. Da die Schule Schülerinnen und Schüler verschiedener Nationalitäten vereint und dem Multikulturalismus verpflichtet ist, wurde der Name zu German International School Boston (GISB) erweitert. In den vergangenen Jahren sind die Anmeldungszahlen stetig gestiegen, sodass der Campus schrittweise erweitert wurde. Zurzeit hat die GISB knapp unter 300 Schülerinnen und Schüler vom Vorschulalter bis Klasse 12. Seit 2013 erhalten erfolgreiche Absolventen der Schule sowohl das Massachusetts High School Diploma als auch das Deutsche Internationale Abitur. Damit können sie in den USA oder in Deutschland bzw. einem Land innerhalb der europäischen Union studieren. Das pädagogische Konzept wird beständig evaluiert und weiterentwickelt. Das vorgestellte SIM ist ein aktuelles Ergebnis des Evaluationsprozesses, was allerdings für sich genommen noch am Anfang steht. Weitere Ergebnisse werden in den nächsten Schuljahren erwartet und es soll darüber berichtet werden. In erster Linie erfolgt der Evaluationsprozess bisher innerhalb des pädagogischen Austausches im Lehr-Team an der GISB. Dafür treffen sich verschiedene Arbeitsgruppen (z. B. Mathematikfachschaftsgruppe, Steuergruppe, ...) mehrmals im Jahr, um das pädagogische Konzept (inklusive des SIM) vor dem Hintergrund der Erfahrungen im Schulalltag zu reflektieren. Standardisierte Instrumente im Sinne der empirischen Bildungsforschung kommen im Evaluationsprozess bisher noch nicht zum Einsatz. Eine externe Begleitung erfolgt nicht nur durch Gutachter bzw. Berater für das deutsche Auslandschulwesen, sondern z. B. durch die erfolgreiche Nominierung für den deutschen Schulpreis 2017. Die Eingangs geschildert Herausforderungen der Digitalisierungen stellen sich der Schulgemeinschaft der GISB gleicher Maßen. Ein SIM kann helfen sowohl informatische Bildungsinhalte zu integrieren als auch das Lernen mit und über digitale Medien in verschieden Fächern zu ermöglichen. Damit können Impulse gesetzt, Synergien genutzt und Projekte strukturiert werden.

Wie kann ein SIM aussehen?

Ein Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM) soll am Beispiel der GISB vorgestellt werden. Dabei soll vorangestellt werden, dass aus einem laufenden Prozess berichtet wird. Die vollständige Implementierung des Konzeptes steht noch aus. Der Diskurs in so einem frühen Stadium wird allerdings als besonders wertvoll erachtet.

Wie in Abb. 2 verdeutlicht, sollen sich die Lernenden in drei Stufen Kompetenzen mit und über digitale(n) Medien aneignen. Dabei sollen auf der ersten Stufe alle Lernenden allgemeine Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien schon im möglichst frühen Alter erwerben, um auch kritisch entscheiden zu können, was die Medien leisten und wie sie die Lernenden im Lernprozess unterstützen können. Bereits im Grundschulalter sammeln die Lernenden an der GISB erste Erfahrungen mit digitalen Medien. Die Kinder werden im Laufe der vierjährigen Grundschulzeit schrittweise an die Medienarbeit herangeführt. In den jahrgangsübergreifenden Klassen 3/4 werden den Lernenden beispielsweise verschiedene Kindersuchmaschinen vorgestellt und gemeinsam für die themenspezifische Recherche eingesetzt. Zudem erstellen die Lernenden in diesen Jahrgangsstufen bereits erste Präsentationen am Computer. Ab der 6. Klassen werden dann in allen Fächern Unterrichtssequenzen mit Chromebooks durchgeführt. Das reicht von der themengebundenen Internetrecherche bis zur Arbeit mit individuellen (onlinegestützten) Lernumgebungen. Die Nutzung der Chromebooks wird ab der 7. Klasse verstetigt, indem jedem Lernenden ein eigenes Gerät für die Arbeit in allen Fächern (und der Freiarbeitszeit) zur Verfügung steht. Das digitale Medium ist ein verlässlicher Lernbegleiter, der den Lernenden grundsätzlich zur Verfügung steht. In bestimmten Unterrichtsphasen wird allerdings global durch die Lehrenden oder individuell durch die Lernenden bewusst auf den Einsatz verzichtet. Im Rahmen der Projektarbeit werden die digitalen Medien im fächerverbindenden oder –übergreifenden Unterricht eingesetzt. Ein Beispiel ist das alljährliche „Science Cafe“, an einem Tag im Jahr stellen alle Schülerinnen und Schüler ihre mathematisch-naturwissenschaftlichen Projekte der gesamten Schulgemeinschaft (inklusive der Eltern) vor. Dabei

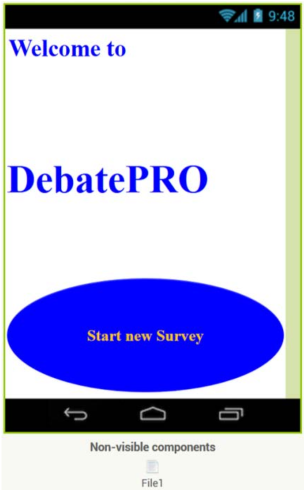


Abb. 3: Schülerlösung „DebatePRO“, App zur Unterstützung einer Debatte in Anlehnung des Formats „Jugend debattiert“. Zu sehen ist der Startbildschirm in der Designer-Ansicht des MIT App Inventors. Zu erkennen ist die von den Lernenden angelegte Datei (File 1) mit der entsprechenden Routine zur Speicherung der Eingaben.

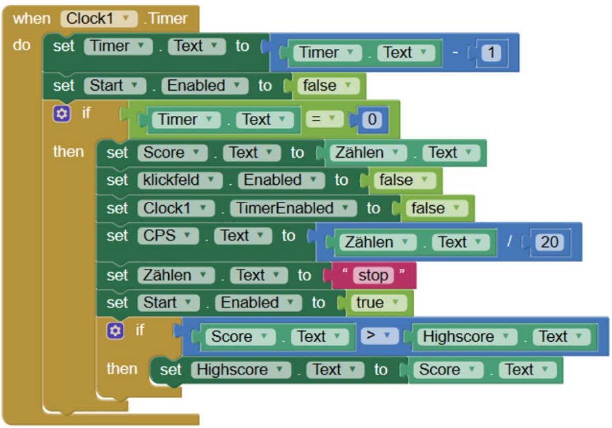


Abb. 4: Schülerlösung „Click-Spiel“, Spiele-App zum Zählen von Bildschirmberührungen innerhalb eines Zeitintervalls. Zu sehen ist der Core-Code des Spiels in der Blocks-Ansicht des MIT App Inventors.

werden auch fachspezifische Kompetenzen im Umgang mit und über digitale(n) Medien erworben. Das entspricht der zweiten Stufe des SIM. Auch im Fachunterricht wird auf dieser Stufe gearbeitet. Z. B. im Deutschunterricht der 8. Klasse erarbeiteten sich die Lernenden im Dezember 2018 einen Debattier-Wettstreit in Anlehnung an „Jugend debattiert“. Zum Thema Chancen und Risiken Künstlicher Intelligenz haben sie im Klassenverbund eine App entwickelt, die die Abschlussdebatte flankierte. Der Schwerpunkt lag dabei auf dem Design der App (Was soll sie können?). Erste Schritte der Umsetzung sind die Lernenden mit dem MIT App Inventor gegangen (s. Abb. 3 und 4)

Innerhalb der ersten beiden Stufen arbeiten die Lehrkräfte der GISB im Unterricht und unterrichtsnahen Lernangeboten wie den beschriebenen Projekttagen (z. B. „Science Cafe“), und unterstützen die Lernenden beim Kompetenzerwerb mit und über digitale(n) Medien. Damit die Lehrkräfte für diese Aufgabe befähigt sind, bestehen Fortbildungsangebote. Zwei Tage im Schuljahr sind generell für Fortbildungen reserviert (Teacher-Development-Dayes). Das gesamte Lehr-Team nimmt an diesen beiden Tagen an allgemeindidaktischen und fachspezifischen Fortbildungsangeboten teil, die in den Räumen der GISB organisiert werden. Darüber hinaus zeigen viele Lehrkräfte ein hohes Maß an persönlichem Engagement und nehmen Fortbildungsangebote im Großraum Boston (z. B. am MIT oder im Museum of Science) wahr.

Auf der dritten Stufe des SIM wird an die Arbeit im Unterricht angeknüpft. Die Grundlagen werden genutzt um gezielt an informatischen Kompetenzen im Umgang mit und über digitale(n) Medien zu erwerben. Auf dieser Stufe wird neigungsspezifisch sowie interessen- und leistungsdifferenziert gearbeitet. In Ganztagsangeboten und Arbeitsgemeinschaften werden z. B. Themen zur Robotik (z. B. mit Lego Mindstorms) und App-Entwicklung (z. B. mit MIT App Inventor) über ein Schuljahr hinweg ausführlich und eingehend behandelt. Für die GISB ist dabei speziell das After-School-Programm (ASP) am Nachmittag relevant. Im ASP werden den Lernenden verschiedene Angebote zu unterschiedlichen Themen von in der Projektarbeit erfahrenen Pädagogen unterbreitet, die auch mit anderen

Bildungsinstitutionen (z. B. Goethe-Institut) assoziiert und meist auf einen Fachbereich spezialisiert sind. Das ASP verfolgt einen ganzheitlichen Ansatz und wird von den Lernenden sehr gut angenommen. Zusammenfassend kann die Abb. 2 speziell für die GISB angepasst und die beschriebenen Angebote den drei Stufen zugeordnet werden (siehe Abb. 5).

Abb. 5: Schulspezifisches Integratives Medienkonzept (SIM) für die German International School Boston (GISB) – Aufbau in drei Stufen zum allgemeinen, fachspezifischen und informatischen Kompetenzerwerb mit und über digitale(n) Medien.

Wo bleibt die Mathematik?

Auch der Mathematikunterricht kann seinen Beitrag im Rahmen des SIM leisten. Dabei können Angebote auf allen drei Stufen bestehen. Exemplarisch solle eine Unterrichtssequenz vorgestellt werden, die auf Stufe 2 einzuordnen ist. In der zehnten Klasse haben die Lernenden den Einfluss von Parametern auf den Graph der Funktion für unterschiedliche Funktionsklassen mit dem digitalen Mathematikwerkzeug GeoGebra untersucht. Zu Beginn der Sequenz sollten die Lernenden Funktionsgleichungen und Funktionsgraphen in einer Art Memory zunächst offen, dann verdeckt zuordnen. GeoGebra wurde zum Überprüfen und Vergleichen der Lösungen eingesetzt. In den folgenden Stunden wurde in jeweils einer Gruppe eine von fünf Funktionsklasse bearbeitet, damit wurde ein differenziertes Arbeiten möglich, denn die Lernenden wurden nach Kompetenzstand und Interesse den Gruppen zugeteilt. Jede Gruppe untersuchte den Einfluss mehrerer Parameter auf den Graphen der Funktion mittels GeoGebra-Schieberegler. Für die Ergebnissicherung bereitete jede Gruppe einen digitalen Lückentext vor, der im (Cloud-)Klassenordner geteilt wurde. Nach der Präsentationsphase der einzelnen Gruppenergebnisse mussten die Lernenden alle Lückentexte zu den Funktionsklassen bearbeiten, an denen sie bisher noch nicht „geforscht“ hatten. Zum Abschluss wurde eine Verallgemeinerung im Klassenverband z. B. in der Form getroffen:

Ist f eine Potenzfunktion mit rationalen (oder ganzzahligen) Exponenten sowie die Parameter $a, b, c, d \epsilon R$ mit $a, b \neq 0$ und gilt für die Funktion g

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x + d) + c$$

dann geht der Graph der Funktion g aus dem Graph der Funktion f…

… für a aus Streckung bzw. Stauchung hervor. Für $a<0$ erfolgt zusätzlich eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

… für b aus Streckung bzw. Stauchung hervor. Für $b<0$ erfolgt zusätzlich … eine Spiegelung des Graphen an der y-Achse.

… für c aus Verschiebung entlang der y-Achse hervor.

… für d aus Verschiebung entlang der x-Achse hervor.

Literatur

Barzel, B. (2019). Digitalisierung als Herausforderung an Mathematikdidaktik – gestern. heute. morgen In: G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.). Digitalisierung fachbezogen gestalten (S. 1-10). Hildesheim: Franzbecker.

BMBF (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft – Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Bundesministeriums für Bildung und Forschung, Referat Digitaler Wandel in der Bildung, Berlin, https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf

GDM u. MNU (2010). Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) sowie des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) zur „Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlichen-technischen Bildung“, https://madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf

GI (2000). Empfehlungen für ein Gesamtkonzept zur informatischen Bildung an allgemein bildenden Schulen. Gesellschaft für Informatik e.V., Berlin, https://gi.de/fileadmin/GI/Hauptseite/Service/Publikationen/Empfehlungen/gesamtkonzept_26_9_2000.pdf

GI (2008). Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule. Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I. Gesellschaft für Informatik e.V., Berlin, https://dl.gi.de/bitstream/handle/20.500.12116/2345/52-GI-Empfehlung-Bildungsstandards_2008.pdf

GI (2016). Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe II. Gesellschaft für Informatik e.V., Berlin, https://dl.gi.de/bitstream/handle/20.500.12116/2350/57-GI-Empfehlung-Bildungsstandards-Informatik-SekII.pdf

Hischer, H. (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim: Franzbecker.

KMK (2016). Bildung in der digitalen Welt – Strategie der Kultusministerkonferenz. Kultusministerkonferenz, Berlin https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/Strategie_neu_2017_datum_1.pdf

Pallack, A. (2018). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I + II. Berlin: Springer Spektrum.

Papert, S. (1993). Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas. New York: Basic Books.

Petko, D. (2014). Einführung in die Mediendidaktik. Lehren und Lernen mit digitalen Medien. Weinheim: Beltz.

Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien – auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel, C. Schreiber (Hrsg.), Lernen, Lehren und Forschen in der Primastufe (S. 37-58). Hildesheim: Franzbecker.

Rink, R.; Walther, D. (2020). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Berlin: Cornelsen. [IM DRUCK]

Jede *Menge* Mathematik. Mathematiklehren und -lernen mit (CAD-)Programmen am Beispiel von Tinkercad™

„Da ist voll viel Mathematik hinter dem Programm“

Felicitas Pielsticker, Ingo Witzke

Mathematiklehren und -lernen mit digitalen Medien, insbesondere Computerprogrammen und Apps, wird immer deutlicher ein Teil des derzeitigen Hochschul- und Schulalltags. Welche Hürden sich dabei ergeben können und ob und wann das Überwinden dieser Hürden einen gewinnbringenden Mehrwert für Lehr-Lern-Prozesse generieren kann, wollen wir in diesem Artikel beispielhaft an dem Fallbeispiel der CAD-Software Tinkercad™ beschreiben.

Ausgangslage und Motivation

Mathematiklehren und -lernen mit digitalen Medien, insbesondere mit dem Computer, Tablet, etc. und darauf nutzbaren Programmen, Apps, etc., füllt derzeit nicht nur Datenbanken, sondern auch Fachliteratur. Auch die mathematikdidaktische Community – vor allem auch Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind angehalten sich mit digitalen Medien in Bezug auf Lehr-Lern-Prozesse auseinanderzusetzen.

Im Sinne unseres als Untertitel formulierten Studierendenzitats „da ist voll viel Mathematik hinter dem Programm“ (Zitat eines Studenten im Projekt) möchten wir beschreiben, welche Möglichkeiten und welche Herausforderungen beim Mathematiklehren und -lernen mit (CAD-)Software aufkommen können. Als Fallbeispiel haben wir uns das Programm Tinkercad™ ausgesucht, da dieses in allen Schulstufen (und Altersgruppen) einsetzbar ist, einen intuitiven und vielschichtigen Zugang zum Umgang mit CAD-Software in Bezug auf mathematische Inhaltsbereiche bietet und gleichzeitig als Teil der 3D-Druck-Technologie weitere Anwendungsfelder (bis hin zur Berufswelt) ermöglichen kann. Gleichzeitig macht das Studierendenzitat auch sofort die Pluralität an Vorstellungen, (Vor-)Wissen und Erfahrungen deutlich, die bei der Nutzung eines digitalen Mediums in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen eine Rolle spielen können und Lehrende sowie Lernende mit unterschiedlichen Problemstellungen konfrontiert. Damit können digitale Medien Anreize für eine zeitgemäße Gestaltung von Lernumgebungen schaffen und weiterhin zu Problemlöseprozessen anleiten.

In Bezug auf den Einsatz von Programmen für mathematische Lehr-Lern-Prozesse, sind wir insbesondere daran interessierte epistemologische Hürden (vgl. Sierpinska, 1992) zu identifizieren. Dabei liegen vor allem solche Hürden im Fokus des Interesses, die für die Implementierung eines digitalen Mediums und aus der Perspektive eines konstruktivistischen Lehr-Lern-Verständnisses (vgl. Bauersfeld, 1983) in der Natur der Sache liegen und auch über unser gewähltes Fallbeispiel hinaus gehen können. Wir möchten mit unserer Beschreibung somit (weitere) didaktische Perspektiven auf Möglichkeiten und Herausforderungen im Umgang mit Programmen beim Mathematiklehren und -lernen eröffnen und mit diesem Beitrag zur Diskussion stellen.

Der hier verfolgte Forschungsansatz der empirischen Theorien (vgl. Schoenfeld, 1985; Burscheid & Struve, 2009; Witzke, 2009; Schlicht, 2016; Schiffer, 2019; Stoffels, 2020; Pielsticker, 2020), erlaubt es uns erfahrungswissenschaftliche Theorien strukturiert zu beschreiben und insbesondere Schülerwissen als in Theorien verfügbar beschreiben zu können. Für diesen Beitrag nutzen wir insbesondere den im Konzept der empirischen Theorien verankerten Dualismus zwischen theoretischen (vereinfacht sind das solche Begriffe die kein Referenzobjekt in der Empirie haben) und nicht-theoretischen Begriffen (empirische Begriffe – für die ein Referenzobjekt in der Empirie existiert oder solche die bereits in einer Vortheorie geklärt wurden) – für weitere Ausführungen vgl. auch Burscheid & Struve (2009). Dabei erscheint uns auf erkenntnistheoretischer Ebene insbesondere ein Zusammenhang zwischen in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen auftretenden epistemologischen Hürden und dem Erwerb (potenziell) theoretischer Begriffe als interessant und zudem Anlass zu sein, über Mathematiklehren und -lernen mit digitalen Medien (weiter) nachzudenken.

Im folgenden Abschnitt wollen wir daher zunächst unser Forschungsansinnen für diesen Beitrag beschreiben und zwei Forschungsfragen formulieren. Im Sinne des von H. Bauersfeld entwickelten Konzepts der Subjektiven Erfahrungsbereiche (kurz: SEB), spielt insbesondere eine detaillierte Beschreibung des Kontextes eine entscheidende Rolle. Aus diesem Grund werden wir nicht nur auf den theoretischen Rahmen eingehen, sondern auch in einer technischen Rahmung auf entscheidende Aspekte des Fallbeispiels – Programm Tinkercad™ – eingehen.

Grundsätzliche Vorüberlegungen und Konzeption

Projektdarstellung und Forschungsansinnen

Innerhalb einer Lehrveranstaltung der Mathematikdidaktik der Universität Siegen im Wintersemester 2019/20, haben Studierende die Möglichkeit innerhalb einzelner Projekte digitale Medien zu testen und auch Lernumgebungen mithilfe dieser zu gestalten. Ein digitales Medium, welches Studierende in der beschriebenen Seminareinheit kennen lernen konnten, war die CAD-Software Tinkercad™, als ein Teil der 3D-Druck-Technologie. Nach einer kurzen Kennenlernphase – Startlektionen, vgl. Abschnitt zur technischen Rahmung – im Programm Tinkercad™, erhielten die Studierenden (ca. 30 Studierende) folgende Aufgabe, die sie eigenständig im Programm Tinkercad™ lösen sollten:

Erstellen Sie in Tinkercad™ zu zweit einen Würfel mit 3 cm Kantenlänge, der bei minimalem Materialeinsatz maximal belastbar wird.

Insgesamt hatten die Studierenden zwei Seminarsitzungen à 1,5 h Zeit für die Bearbeitung. Die so entstandenen und von den Studierenden entwickelten Entwürfe aus Tinkercad™ konnten nach dem Prozess im Programm auch mithilfe eines 3D-Druckers erstellt und mithilfe von Gewichten auf Belastbarkeit getestet werden. Die Extremwertaufgabe wurde anschließend auch rechnerisch gelöst und das Ergebnis mit den Daten aus dem Belastbarkeitstest verglichen.

Mithilfe einer teilnehmenden Beobachtung (Beobachtungsbogen, vgl. Anhang) innerhalb eines qualitativen Forschungssettings wurde dabei gezielt der Bearbeitungsprozess der Studierenden in Tinkercad™ erhoben, um folgende zwei Forschungsfragen zu diskutieren.

1. Inwiefern lassen sich (potenziell) theoretische Begriffe in Bezug auf das Programm Tinkercad™ identifizieren und stellen dabei eine Hürde für mathematische Lehr-Lern-Prozesse dar?
2. Inwiefern trägt Tinkercad™ zur Transparenz über (mathematische) Prozesse bei und inwiefern werden diese verschleiert?

Theoretische Rahmung

Wie bereits oben beschrieben, verfolgen wir den Forschungsansatz der empirischen Theorien. Um damit Lehr-Lern-Prozesse beschreiben zu können, wollen wir insbesondere den Dualismus von theoretischen und nicht-theoretischen Begriffen unserer Analyse zugrunde legen, weiterhin die Begriffe paradigmatisches Beispiel, intendierte Anwendung und empirisches Objekt zur Beschreibung verwenden. Dazu nutzen und verstehen wir die Begriffe folgendermaßen:

Fachtermini	Beschreibung mit Erläuterung
Intendierte Anwendungen	„Jede empirische Theorie hat das Ziel, gewisse Phänomene der Realität zu beschreiben und zu erklären. Diese Phänomene werden intendierte Anwendungen genannt. Die intendierten Anwendungen einer empirischen Theorie […] werden beispielhaft charakterisiert, d.h. durch Angabe von paradigmatischen Beispielen (vgl. entsprechenden Fachterminus) festgelegt.“ (Struve, 1990, S. 39).
Paradigmatische Beispiele	Paradigmatische Beispiele, sind Beispiele für grundlegende Anwendungen der Theorie. Somit sind sie besonders prägnante Beispiele für spezifische in der empirischen Theorie […]

	beschriebene intendierte Anwendungen (vgl. entsprechenden Fachterminus). Sie begründen eine Klasse intendierte Anwendungen einer empirischen Theorie. Alle Entitäten, die hinreichend ähnlich (vgl. hierzu Stegmüller, 1973, S. 198ff und S. 207ff.) zu diesen Beispielen sind, werden zu den intendierten Anwendungen gerechnet. Die Menge aller dieser Anwendungen wird also intentional charakterisiert, nicht extensional (vgl. Struve, 1990, S. 39).
Empirische Objekte	Als empirische Objekte werden in dieser Arbeit Gegenstände und Objekte der Realität bezeichnet, die für Schülerinnen und Schüler unmittelbar, insbesondere taktil oder visuell zugänglich sind.
Nicht-T-theoretische Begriffe und empirische Begriffe	Nicht-T-theoretische Begriff und empirische Begriffe sind Begriffe einer Theorie T, die vor der Aufstellung der Theorie T definiert sind (vgl. Burscheid & Struve, 2009). Hierzu zählen die „empirischen Begriffe“, d.h. Begriffe, die empirische Objekte als Referenzobjekte besitzen, etwa der Begriff „Würfel“ im Mathematikunterricht, in dem Würfel mit der 3D-Druck-Technologie hergestellt werden. Für alle Theorien T gilt, dass Begriffe, die Objekte der Realität bezeichnen, mit anderen Worten Referenzobjekte in der Realität besitzen, nicht-T-theoretisch sind.
T-theoretische	T-theoretische Begriffe sind solche, deren

Begriffe	Bedeutung erst in der Theorie T geklärt wird (vgl. Burscheid & Struve, 2009). Insbesondere ist die Bedeutung eines solchen Begriffs nicht in einer Theorie T‘ festlegbar, die unabhängig von der Theorie T ist. Ausschließlich T kann den fraglichen Begriff definieren. Vgl. hier auch das von Sneed formulierte Theoretizitätskriterium von Begriffen in Bezug auf eine Theorie T (vgl. Stegmüller, 1986, S. 33).

Tab. 1: Ausgewählte Fachtermini des Forschungsansatzes empirische Theorien (vgl. Pielsticker, 2020, S. 36-44).

Technische Rahmung

Tinkercad™ ist ein im Bildungsbereich frei zugängliches, kostenloses und webbasiertes CAD-Programm des Softwareanbieters Autodesk®. Weiterhin ist es ein so genanntes direkt-modellierendes Programm. Ein Vorteil besteht dabei insbesondere in der einfachen Erlernbarkeit wobei keine komplexeren (geometrischen) Objekte erzeugt werden können. Solche werden erst bei parametrischem oder skriptbasiertem Modellieren möglich. Bei skriptbasiertem Modellieren innerhalb einer entsprechenden CAD-Software ist sogar ein Umgang mit Variablen, logischen Operatoren oder Loops möglich. (Vgl. Dilling, 2019; Dilling & Witzke, 2019). Tinkercad™ gibt die Möglichkeit mit einem sogenannten „Starter“ zu beginnen (vgl. Abb. 1). Hier kann erlebt werden, wie (virtuell-)empirische Objekte wie Würfel, Zylinder, Kugel aber auch ein Stern, auf der Programmoberfläche gedreht („rotate it“, vgl. Abb. 1), verschoben („move it“, vgl. Abb. 1), vergrößert und verkleinert werden können. Dabei wird der Quader in den verschiedenen Lektionen des „Starters“ als paradigmatisches Beispiel genutzt, an dem die verschiedenen Prozesse durchgeführt werden.

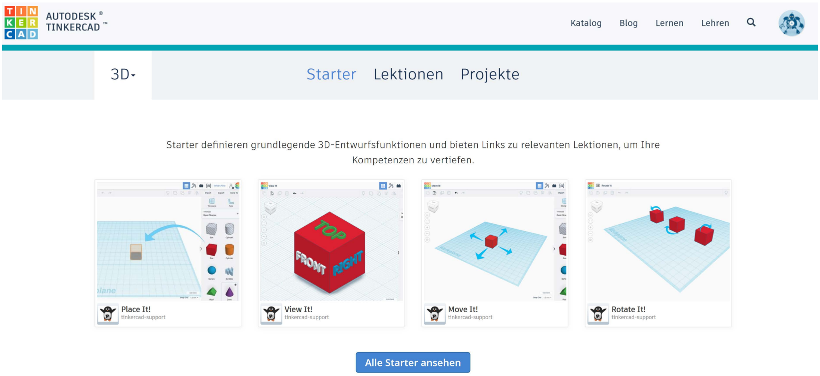


Abb. 1: „Starter“ im Programm Tinkercad™.

Als intendierte Anwendung können wir an dieser Stelle somit das Drehen, Verschieben, Vergrößern und Verkleinern des Quaders auf der Arbeitsebene von Tinkercad™ beschreiben. In der Randleiste der Programmoberfläche können dann weitere empirische Objekte (wie bspw. die Pyramide, die Halbkugel oder der Keil) kennengelernt werden.

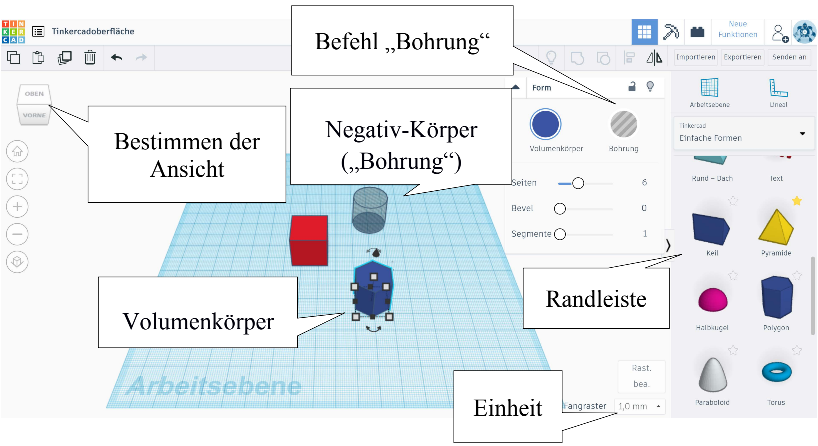


Abb. 2: Programmoberfläche von Tinkercad™.

Besonders interessant ist für uns an dieser Stelle die Unterscheidung in „Volumenkörper“ und „Komplementärkörper“ (Negativ-Körper) für die Funktion einer „Bohrungen“, referenziert durch eine grau-schraffierte Oberfläche – also eine heuristische Darstellung (im Sinne einer „heuristischen Veranschaulichung“ Witzke, 2009, S. 130) von negativen Körpern (vgl. Abb. 2).

Diskussion

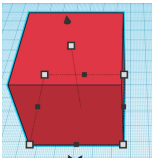
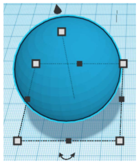
In dem folgenden Abschnitt sollen einige Aspekte von Tinkercad™ unter dem Gesichtspunkt Mathematik betrachtet werden. Dazu beschreiben wir im Folgenden eine Auswahl. Natürlich kann Tinkercad™ in vielen weiteren Situationen und Inhaltsbereichen „Mathematik“ beinhalten.

Tinkercad™ und „Mathematik“

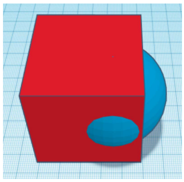
„Mathematik“ ist vielschichtig. Eine Möglichkeit sich „Mathematik“ zu nähern ist über beliefs bzw. Auffassungen, so wie es bspw. Schoenfeld (1985) in seinen Studien zu Problemlöseprozessen getan hat. In der oben bereits erwähnten Lehrveranstaltung wurden Studierende – angehende Lehrerinnen und Lehrer – nach dem Zusammenhang von Tinkercad™ und „Mathematik“ gefragt. Sehr häufig wurde eine Verbindung zu Erfahrungsbereichen zu geometrischen Körpern und Projektionen und damit zu Inhalten der Geometrie genannt. Auch das Umrechnen von Einheiten (z. B. mm in cm) wurde in dieser Seminareinheit erwähnt. Ein weiterer Diskussionspunkt aus Sicht der Hochschullehrenden und der Studierenden war eine Verbindung zur booleschen Algebra. Wie Staab in seinem Lehrbuch „Logik und Algebra“ (2007) am Anfang des Kapitels 4 zur booleschen Algebra festhält, können wir nach

„[…] dem Kennenlernen der Aussagenlogik und der Mengenalgebra […] nun zu einer übergeordneten Struktur, der sog. Booleschen Algebra, übergehen“ (ebd., S. 59).

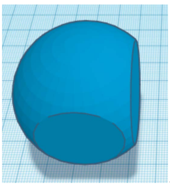
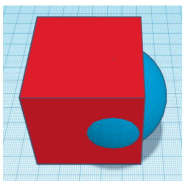
Dabei kann die Mengenalgebra als Modell einer booleschen Algebra gesehen werden. Fassen wir nun die Punktmengen M_1 und M_2 folgendermaßen auf, mit $\Omega = R^3$

Körper M_1=  , Körper M_2= 

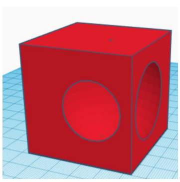
Dabei sollen die Körper M_1, M_2 wie folgt zueinander in der Ebene liegen:



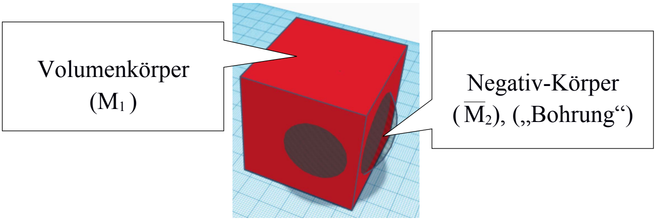
Damit sind dann verschiedene Verknüpfungen mit booleschen Operatoren wie folgt interpretierbar, also z. B. der Mengendurchschnitt, die Mengenvereinigung und die Vereinigung mit einer Komplementärmenge sehen wie folgt aus:

$M_1 \cap M_2$= , $M_1 \cup M_2$= 

und

$M_1 \cap M_2$= .

Dabei wird z. B. $M_1 \cap \overline{M}_2$ erzeugt, indem mit dem Befehl „Bohrung“ in Tinkercad™ ein Negativ-Körper ($\overline{M}_2$), repräsentiert durch eine grauschraffierte transparente Oberfläche mit einem Volumenkörper M_1 „gruppiert“ und damit zum Schnitt gebracht wird.



Damit wird deutlich, dass das Programm Tinkercad™ jede Menge „Mathematik“ in sich birgt, z. B. wenn „algebraische Strukturen [betrachtet werden, die sich] mit Mengen und Verknüpfungen innerhalb dieser Mengen beschäftigen“ (Staab, 2007, S. 32).

Im nachfolgenden Abschnitt wollen wir ein Studierendenteam aus der Lehrveranstaltung bestehend aus Tim und Lara (Namen geändert) detailliert beschreiben. Die dargestellte Situation ist aus der Seminareinheit entnommen.

Ein Fallbeispiel: „Bohrung“ als „Negativ-Körper“

Tim und Lara haben bei der Entwicklung ihres Würfels mit einer Kantenlänge von 3 cm überlegt, den Würfel im Innern mit einer sechseckigen Wabenstruktur auszustatten. Dazu wollen die beiden aus einem „gefüllten“ Volumenkörper – Würfel, einzelne sechseckige Waben herausstanzen, sodass eben nur noch die „Wände“ im Inneren des Würfels übrigbleiben (vgl. Abb. 3).

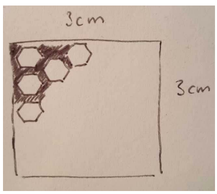


Abb. 3: Wabenstruktur im Inneren des Würfels von Tim und Lara.

Nach der Skizzenerstellung entsteht folgender Gesprächsauszug, der im Beobachtungsbogen als Protokoll mitgeschrieben wurde:

17:10 *Lara* *Warum habe ich hier (zeigt mit der Hand auf die Randleiste Tinkercads ™) gleich oben, zweimal den Quader und diesen Zylinder?*

17:45 *Tim* *(zieht den grauschraffierten Quader auf die Arbeitsebene von Tinkercad ™). Da war eben bei den Startern so ein Bohren. Das graue ist zur Bohrung.*

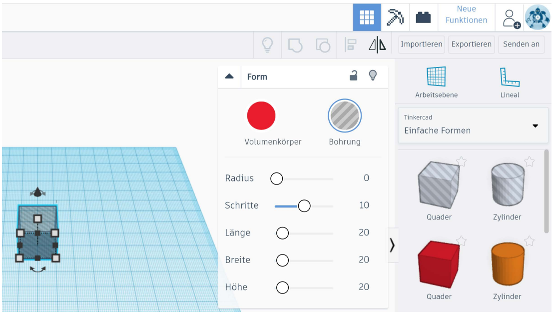


Abb. 4: grauschraffierte Körper in Tinkercad ™.

18:00 *Lara* *Wie will ich denn mit dem Quader oder dem Zylinder bohren. Und warum? Wie stanzen wir die Waben nun aus? Guck mal in der Leiste da. (4 sec.) Da gibt es sogar Schrift.*

Lara fällt beim ersten Blick auf die Programmoberfläche gleich die doppelte Darstellung des Quaders und des Zylinders auf. Die Antwort von Tim auf ihre Warum-Frage (vgl. Protokoll, 17:10), scheint für Sie keine zufriedenstellende Antwort zu sein. Sie fragt weiter: „wie will ich denn mit dem Quader oder dem Zylinder bohren“ (vgl. Protokoll, 18:00). Der Vorgang der „Bohrung“ wird im Programm Tinkercad ™ durch einen grauschraffierten Volumenkörper referenziert. Lara stört sich daran, dass ein Volumenkörper nun als „Bohrung“ genutzt und im Programm Tinkercad ™

auch als solche ausgewiesen wird (vgl. Abb. 2 & 4). Sie verwendet den Begriff „Stanzen“ (vgl. Protokoll, 18:00) und sucht eventuell nach Formen die zum „Ausstanzen“ geeignet sind.

Mithilfe des Befehls „Bohrung“ erstellt man in Tinkercad™ im Sinne einer mengentheoretischen Komplementbildung, einen grau-schraffierten Körper, eine heuristische Darstellung eines negativen Körpers – eines Negativ-Körpers (vgl. Abb. 2 & 4) – der genutzt werden kann, um Aussparungen in den anderen geometrischen Körpern – den „Volumenkörpern“ – zu erreichen. Mit diesen Negativ-Körpern wird etwas dargestellt, was in der Realität kein Referenzobjekt besitzt. Sogenannte „Volumenkörper“ – wenn man so will, Positiv-Körper im Programm Tinkercad™ – können mithilfe eines 3D-Druckers ausgedruckt werden. Damit haben die „Volumenkörper“ als positive Körper eine andere Qualität als die Negativ-Körper, welche z. B. nicht mithilfe des 3D-Druckers gedruckt und auf eine Tischoberfläche gestellt werden können. Das solch eine heuristische Darstellung eines negativen Körpers für Lara eine Hürde darstellt, scheint vor dem Hintergrund des Konzepts empirischer Theorien nicht überraschend. Dass legt nahe, das der Negativ-Körper bei der Studentin eventuell zu einem kognitiven Konflikt führt. Dass könnte auf die Theoretizität des Begriffs Negativ-Körper – ausgelöst durch den Befehl der „Bohrung“ – hinweisen, da dieser Begriff unabhängig von dem Erfahrungsbereich Tinkercad™ unverständlich bleibt. Im Programm wird für den Befehl der „Bohrung“ ein „Volumenkörper“, ein Positiv-Körper und ein Negativ-Körper addiert. Es ist nicht so, dass sozusagen von einem Positiv-Körper ein weiterer Positiv-Körper abgezogen wird. Nehmen wir an dieser Stelle ein Zahlenbeispiel zur Hilfe:

$$\mathbf{(5) + (-3)} = (5) - (3)$$

Im Sinne dieses Zahlenbeispiels (5) + (–3) funktioniert der Befehl der „Bohrung“ in Tinkercad™.

Tinkercad™ addiert in seiner Programmoberfläche – mithilfe des Zahlenbeispiels ausgedrückt – eine positive Zahl (5) mit einer negativen Zahl und (–3) subtrahiert nicht die kleinere positive Zahl (3) von einer größeren positiven Zahl (5). Damit stellt im Erfahrungsbereich Tinkercad™ ein grau-schraffierter Körper, eine heuristische Darstellung eines negativen Körpers – eines Negativ-Körpers (vgl. Abb. 2 und 4) dar, der bei der Funktion einer „Bohrung" zu einer Hürde in Lehr-Lern-Prozessen werden kann.

Ein Negativ-Körper würde so als (potenziell) theoretischer Begriff, im Sinne des Forschungsansatzes der empirischen Theorien, die Gültigkeit einer Theorie (in Bezug auf Tinkercad™) voraussetzen und kann nicht der unmittelbaren Beobachtung entnommen werden (vgl. Stegmüller, 1987). Wir nutzen an dieser Stelle „(potenziell) theoretisch", da es sein kann, dass der Negativ-Körper bei jemandem, der bereits viel Erfahrung mit dem CAD-Programm hat nicht zu einer Hürde werden kann. Eventuell kommt das Problem innerhalb des Programms auch nicht auf. Weiterhin möchten wir darauf hinweisen, dass die Objekte im Programm Tinkercad™ zwar virtueller Natur sind, aber im Sinne empirischer Theorien dennoch als empirische Objekte beschrieben werden können.

Tim erklärt sich die Hürde möglicherweise mithilfe der Funktionsweise des Programms und dem damit zusammenhängenden Prozess – „(zieht den grau-schraffierten Quader auf die Arbeitsebene von Tinkercad™). Da war eben bei den Startern so ein bohren" (vgl. Protokoll, 17:45). Vielleicht gilt für Tim im umgangssprachlichen Sinne auch – so funktioniert das halt bei Tinkercad™.

Fazit und Ausblick

Mit Blick auf unsere 1. Forschungsfrage können wir festhalten, dass der Begriff des Negativ-Körpers in Bezug auf das Programm Tinkercad™ als (potenzieller) theoretischer Begriff gelten kann und damit eine (epistemologische) Hürde für Studierende, (angehende) Lehrkräfte, aber auch Schülerinnen und Schüler darstellen und zu einem kognitiven Konflikt führen kann. Dennoch können theoretische Begriffe als „Motor“ (Witzke, 2009, S. 346) zur Weiterentwicklung von Wissen gesehen werden, indem sie innerhalb des Mathematiklehrens und -lernens als Anlass gesehen werden, Konzepte zu hinterfragen und Deutungskonflikte auszuhandeln. Sie regen weiterhin eine kritische Auseinandersetzung mit der (eigenen) Unterrichtskonzeption an und können daher auch als Chance für gewinnbringende Aushandlungs- und Reflexionsprozesse gesehen werden. Natürlich ist der Hochschul- oder Fachlehrer als inhaltliche und didaktische Referenz an solch sensiblen Stellen besonders wichtig für einen sinnstiftenden Lehr-Lern-Prozess (vgl. Pielsticker, 2020).

In Bezug auf unsere 2. Forschungsfrage können wir auch noch einmal auf das Studierendenzitat im Untertitel verweisen. Tatsächlich können Tinkercad™ und weitere digitale Medien häufig *jede Menge* „Mathematik“ enthalten. Schnell ist einsichtig, dass so ein CAD-Programm viele Prozesse transparent gestalten kann. Z.B. bei dem Extremwertproblem, kann der Entwicklungsprozess nachvollzogen werden und damit beschrieben werden, warum der erstellte Würfel trotz sehr geringem Materialaufwand sehr stabil ist. Gleichzeitig muss auch die (mathematische) Pluralität und Komplexität die digitale Medien mit sich bringen bei Lehr-Lern-Prozessen bedacht werden, insofern, dass mathematische Zusammenhänge implizit in den Programmen grundlegend sind und weiterhin (potenziell) theoretische Begriffe als epistemologische Hürden bei Lehrenden und Lernen auftreten können. Insbesondere für unsere 2. Forschungsfrage schließen wir uns Hölzl bzgl. eines „didaktischen Gleichgewicht[s]“ (Hölzl, 1994, S. 224) an: „Mächtigere medientechnische Möglichkeiten auf der einen Seite verlangen mehr didaktische, gar ethische Anstrengungen auf der Lehrerseite“ (ebd., S. 224).

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2009). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer.

Dilling, F. & Witzke, I. (2019). Zur Funktionsweise der 3D-Druck-Technologie. *Mathematik lehren*, 217, 10-12.

Pielsticker, F. (erscheint 2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht am Beispiel der 3D-Druck-Technologie*. Wiesbaden: Springer.

Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Schlicht, S. (2016). *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs*. Wiesbaden: Springer.

Schiffer, K. (2019). *Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra*. Wiesbaden: Springer.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 10 (3), 24-36.

Staab, F. (2007). *Logik und Algebra. Eine praxisbezogene Einführung für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker*. München Wien: Oldenbourg Verlag.

Stegmüller, W. (1973). *Jenseits von Popper und Carnap: Die logischen Grundlagen des statistischen Schließens*. Berlin: Springer.

Stegmüller, W. (1986). *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie Band II - Theorie und Erfahrung - Dritter Teilband*. Berlin: Springer.

Stegmüller, W. (1987). *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*, Band 2. Stuttgart: Alfred Kröner Verlag.

Stoffels, G. (erscheint 2020). *(Re-)konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung. Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule Hochschule*. Wiesbaden: Springer.

Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.

Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*. Köln: Franzbecker.

Die MicroBerry-Lernumgebung. Ein handlungsorientiertes Konzept zu Algorithmen im Informatikunterricht mit fächerübergreifenden Bezügen zum Mathematikunterricht

Andreas Schnirch

Vorgestellt wird die handlungs- und problemorientierte Lernumgebung „MicroBerry“, die für den Informatikunterricht der Sekundarstufe I entwickelt wurde. Schülerinnen und Schüler können sich darin experimentell die Grundbausteine von Algorithmen erschließen. Das dabei erworbene Wissen nutzen die Schülerinnen und Schüler anschließend, um mit der Lernumgebung eigene Projekte zu realisieren. Die Unterrichtseinheiten wurden an einem außerschulischen Lernort, an einer Realschule und an der Hochschule mit Schülerinnen und Schülern aus Realschulen und Gymnasien erprobt und evaluiert. Empirisch untersucht wurden Interessen- und Motivationsaspekte der Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit der Lernumgebung. Vorgestellt werden neben der Konzeption der Lernumgebung die praktischen Erfahrungen bei der Durchführung der Unterrichtseinheiten. Außerdem werden Bezüge zu inhaltlichen Aspekten des Mathematikunterrichts hergestellt und diskutiert.

Einleitung

Wie sollte eine Lernumgebung gestaltet werden, um Schülerinnen und Schülern einen motivierenden und interessanten Einstieg in den informatischen Anfangsunterricht zu ermöglichen?

Dieser Frage sind wir im Rahmen verschiedener Informatikseminare zum Einsatz des Mikrocomputers Raspberry Pi im Unterricht und Forschungsprojekten an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg nachgegangen. Auf dieser didaktischen Grundlage und den praktischen Erfahrungen, die wir mit Informatikkursen für Schülerinnen und Schüler an der MPDV-Junior-Akademie und an der Hochschule gesammelt haben, entstand die hier zu beschreibende MicroBerry-Lernumgebung. Inhaltlich werden dabei die Grundbausteine von Algorithmen thematisiert. Um einen handlungs- und problemorientierten Zugang zu ermöglichen nutzen wir die GPIO´s des Raspberry Pi, um daran angeschlossene Aktoren und Sensoren anzusteuern und mit entsprechender Software zu programmieren. Die Schülerinnen und Schüler lernen dabei zunächst die verschiedenen Grundbausteine kennen und nutzen diese zur Problemlösung. In einer zweiten projektorientierten Phase wenden die Schülerinnen und Schüler das Gelernte an, um eigene Projektideen zu verwirklichen. Nicht zuletzt durch diesen projektorientierten Ansatz lassen sich viele fächerübergreifende Aspekte identifizieren. Insbesondere finden sich inhaltliche und methodische Bezüge zum Technik-, Physik- und Mathematikunterricht.

Abb. 1: MicroBerry-Kurs an der MPDV-Junior-Akademie

Die MPDV-Junior-Akademie[1]

Die MPDV-Junior-Akademie ist ein außerschulischer Lernort, der im Nov. 2014 gegründet wurde[2]. Ziel der Junior-Akademie ist es, Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und Schularten, an MINT-Themen heranzuführen und diese für deren Inhalte zu begeistern. Dabei werden regelmäßig für die Unterstufe Roboterkurse, für die Mittelstufe Mikrocontroller-Seminare und für die Oberstufe Kurse zum Experimentieren mit einem automatisierten Fertigungssystem angeboten. Eine Besonderheit dabei ist, dass die Unter- und Mittelstufenkurse von Studierenden der Fächer Informatik und Technik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg und die Oberstufenkurse von Studierenden der Dualen Hochschule Baden-Württemberg durchgeführt werden. Speziell für die Lehramtsstudierenden bietet sich hier eine ideale Spielwiese, pädagogische Lehrerfahrungen zu

1 https://www.mpdv.com/de/unternehmen-referenzen/mpdv-junior-akademie/

2 https://www.mpdv.com/de/presse/pressemeldungen/pressemeldungdetails/mpdv-gruendet-junior-akademie-zur-it-qualifizierung-von-schuelerinnen-und-schuelern/

sammeln, auszubauen und zu professionalisieren. Die Studierenden werden dabei von Dozierenden der Pädagogischen Hochschule Heidelberg und erfahrenen Lehrkräften vor Ort betreut. Nach der Durchführung werden die Seminare jeweils analysiert, reflektiert und das jeweilige Konzept optimiert (Fast 2017).

Theoretische Grundlagen

Bei der Entwicklung unserer Lernumgebung nutzten wir Gestaltungskriterien und Aspekte, die sich aus konstruktivistischen Lehr-Lerntheorien, aus der Interessen- und Motivationsforschung und aus informationsdidaktischen Erkenntnissen ableiten lassen.

Gestaltungsaspekte für Lernumgebungen aus konstruktivistischer Sicht

In den sechs Grundsätzen eines guten Informatikunterrichts (GI 2008) verweisen die Autoren im Bereich „Lehren und Lernen" auf den Konstruktivismus und begründen damit die Notwendigkeit eines Anwendungsbezugs im Informatikunterricht. Der Konstruktivismus kann als theoretische Grundlage für einen handlungs-, problem- und anwendungsorientierten Informatikunterricht genutzt werden, aber auch konkrete Gestaltungskriterien für Lernumgebungen bereitstellen, die einen solchen Unterricht begünstigen (Schubert & Schwill 2011). Lernen ist aus konstruktivistischer Sicht nur dann möglich, wenn sich die Lernenden aktiv am eigenen Lernprozess beteiligen. Somit sollte eine Lernumgebung so gestaltet sein, dass diese Aktivität möglichst gefördert wird. Aus dem Konzept des „situierten Lernens" (u. a. Clancey 1993; Mandl, Gruber & Renkl 2002) haben z. B. Gerstenmaier & Mandl (1995) grundlegende Gestaltungsaspekte für Lernumgebungen abgeleitet. Hense, Mandl & Gräsel (2001) entwickelten, daran anknüpfend, das Konzept des „problemorientierten Lernens", das dem „Problem" im Lehr-Lernprozess eine zentrale Rolle zuweist (Tulodziecki 2005; Buchholtz 2010).

Um einen Anwendungsbezug herzustellen, sollen sich Lernende dabei in authentischen Situationen mit möglichst realistischen Problemen beschäftigen und entsprechende Aufgaben lösen. Durch „Multiple Kontexte und Perspektiven“ soll gewährleistet werden, dass die zu erlernenden Inhalte und Prozesse flexibel auf verschiedene Problemstellungen übertragen werden können. Im Kontext des „Sozialen Lernens“ ist es bedeutsam, dass die Lernumgebung kooperatives Lernen ermöglicht. Außerdem sind subjektiv erkennbare Handlungsspielräume notwendig, damit die Lernenden eigene Wissenskonstruktionen, Erfahrungen und Interpretationen vornehmen können (Hense, Mandl & Gräsel 2001). Es ist aber auch sinnvoll, dass beim selbstgesteuerten Lernen eine ausreichende instruktionale Unterstützung gegeben wird, damit die Lernenden bei möglichen Problemen nicht demotiviert aufgeben (Gerstenmaier & Mandl 1995; Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001). Die Forderung nach multiplen Kontexten und Perspektiven ließe sich, so Hense, Mandl & Gräsel (2001), am besten im fächerübergreifenden Unterricht verwirklichen, da hier unterschiedliche und interdisziplinäre Sichtweisen zum Tragen kommen. Dieser Aspekt lässt sich nun wiederum gut im Informatikunterricht umsetzen, denn „Informatik ist per se fachübergreifend und fächerverbindend, deshalb ist Interdisziplinarität ein Grundsatz der Unterrichtsgestaltung“ (GI 2008, S.10).

Interesse und Motivation

Zeigt eine Person Interesse an einem Lerngegenstand, ist dies in der Regel zunächst ein zeitbegrenzter Zustand, der von der aktuellen Situation, wie z. B. einer als spannend empfundenen Lernumgebung, abhängt. Man spricht in diesem Zusammenhang von situationalem Interesse (Krapp & Prenzel 2011). Durch die wiederholte Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand kann sich unter günstigen Bedingungen stufenweise ein dauerhaftes Interesse, das sogenannte individuelle Interesse ausbilden (ebd.). Dafür ist es allerdings notwendig, dass die Lernsituation emotional positiv bewertet wird, was wiederum von spezifischen Motivationsfaktoren abhängig ist (Krapp 1998). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation nach Deci & Ryan (1993, 2002) liefert diese Faktoren, zu denen neben den Grundbedürfnissen nach Kompetenzerleben, Selbstbestimmung und sozialer Eingebundenheit auch grundlegende Fähigkeiten und Interessen einer

Person gehören (Krapp 2005). Kompetenzerleben meint dabei die erlebte Handlungsfähigkeit bei der Bewältigung von Aufgaben und Problemen (Krapp 1998). Die Selbstbestimmung zielt darauf ab, Ziele und Vorgehensweisen des eigenen Handelns selbst zu bestimmen. Im Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit spiegelt sich das Bestreben nach befriedigenden Sozialkontakten wieder (ebd.).

In der Selbstbestimmungstheorie unterscheidet man fünf verschiedene Motivationsstufen. Während intrinsische Motivation, verstanden als interessenbestimmte Handlung, den einen Pol dieser Stufung bildet, werden die anderen vier Stufen der extrinsischen Motivation zugeordnet, die sich im Ausmaß der erlebten Selbstbestimmung unterscheiden. Auf der untersten Skala ist das Handeln einer Person dann völlig fremdbestimmt. Nach Deci & Ryan (1993) hat nun jedes Individuum das Bestreben, extrinsisch motivierte Verhaltensweisen in selbstbestimmte Handlungen zu überführen. Studien konnten nun zeigen, dass im schulischen Kontext intrinsische Motivation gesteigert werden kann, wenn Lernumgebungen bereitgestellt werden, die die Motivationsbedürfnisse der Lernenden befriedigen (Krapp & Ryan 2002; Krapp 2005).

Problemorientierung im Informatikunterricht

Aus konstruktivistischer Sicht kann Wissensentwicklung und Lernen in problemorientierten Lernumgebungen, in denen sich Lernende mit entsprechender Unterstützung autonom bewegen können, optimal gefördert werden. Aufgrund der Förderung des selbstbestimmten Arbeitens und der Möglichkeit, das eigene Kompetenzerleben durch erfolgreich gelöste Probleme zu steigern, kann davon ausgegangen werden, dass solche Lernumgebungen hohe Motivationspotentiale aufweisen. Auch die Informatikdidaktik weist dem methodischen Prinzip der Problemorientierung eine große Bedeutung zu. So geht z. B. Hubwieser (2007) davon aus, dass durch konkrete und anschauliche Problemstellungen, abstrakte Inhalte erfolgversprechend vermittelt werden können. Zendler & Spannagel (2008) identifizierten dann auch das „Problem“ als ein zentrales Konzept des Informatikunterrichts.

Fachübergreifendes Lernen

Wie oben dargestellt, kann die Forderung nach authentischen Unterrichtsinhalten in multiplen Kontexten und Perspektiven besonders gut im fachübergreifenden Unterricht realisiert werden. Da Interdisziplinarität ein wichtiger Grundsatz des Informatikunterrichts ist (GI 2008), scheint diese Forderung hier gut umsetzbar zu sein. Poloczek (2015) sieht in diesem Zusammenhang dann auch im fachübergreifenden Unterricht die Möglichkeit der besonderen Förderung der Persönlichkeitsentwicklung. Die Kombination mit der Projektmethode bzw. mit projektorientiertem Unterricht sei dabei besonders sinnvoll (ebd.).

Anfangsunterricht in der Informatik

Schubert & Schwill (2011) unterscheiden unterschiedliche Zugangsmöglichkeiten im informatischen Anfangsunterricht. Beim programmiersprachlichen Zugang geht es um das Erlernen einer objektorientierten Programmiersprache mithilfe einfacher fiktiver Problemstellungen. Beim systemanalytischen Zugang erschließen sich die Lernenden ein komplexes Softwaresystem. Beim Zugang über Lernumgebungen sollen die Schülerinnen und Schüler meist objektorientiert programmieren, um, ausgehend von geringen Kenntnissen, schrittweise relativ leistungsfähige Programme zu erzeugen. Der projektorientierte fächerübergreifende Zugang ermöglicht die Umsetzung eines umfangreichen Projekts (ebd.).

Konzeption der MicroBerry-Lernumgebung

Unser Ziel war es, eine motivationsfördernde Lernumgebung zu Grundbausteinen von Algorithmen für den Anfangsunterricht zu entwickeln. Die dargestellte Theorie legt nahe, dass eine problemorientierte Lernumgebung, bei denen Lernende die Möglichkeit haben, sich aktiv mit problem- und anwendungsorientierten Aufgaben zu beschäftigen, hierfür gut geeignet ist. Die Forderung nach Authentizität in multiplen Kontexten und Perspektiven lässt sich besonders gut im fächerübergreifenden Unterricht realisieren. Deshalb haben wir Aspekte der Elektrotechnik und Elektronik integriert. Hier geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Programme nutzen, um einfache Sensoren und Aktoren (LEDs, Schalter, Motoren, Servos, etc.) anzusteuern. Dabei ist der handelnde Umgang mit den Bauteilen wesentlicher Bestandteil des Konzepts, so dass die Zusammenhänge von Soft- und Hardware exemplarisch greif- und erfassbar werden und damit ein Alltags- und Lebensweltbezug ermöglicht wird.

Projektorientierter Unterricht ist als Methode sicherlich gut geeignet, die Kriterien einer problemorientierten Lernumgebung zu erfüllen. Bevor Projekte realisiert werden können, müssen aber zunächst grundlegende Fachinhalte und Prozesse gelernt werden. Dies betrifft sowohl die informatischen als auch die fachübergreifenden Aspekte. Es sind also zunächst solide Grundlagen zu schaffen, bevor man ein Projekt erfolgreich bewältigen kann. Deshalb haben wir die MicroBerry-Lernumgebung so gestaltet, dass sich die Lernenden zunächst über problem- und anwendungsorientierte Aufgaben die notwendigen Grundlagen erarbeiten, um diese später dann in einer projektorientierten Phase anwenden und damit vertiefen zu können. Wir nutzen somit im Anfangsunterricht die MicroBerry-Lernumgebung als zentrales Informatiksystem und kombinieren diese mit dem programmiersprachlichen und projektorientierten fächerübergreifenden Zugang.

Zentrales Medium unserer Lernumgebung ist der Mikrocontroller Raspberry Pi, an dem über die GPIO-Schnittstelle elektronische Bauelemente angesteuert werden. Die benötigten Hardwarematerialien werden den Schülerinnen und Schülern in einem übersichtlichen Sortimentkasten zur Verfügung gestellt (Abb. 2). Programmiert werden kann in den beiden Programmiersprachen Scratch oder Python. Außerdem nutzen wir den Raspberry Pi, um eine vernetzte Kommunikationsplattform aufzubauen. Damit sind wir in der Lage, die Programme der Schülerinnen und Schüler zentral zu speichern und bei Bedarf allen in der Lerngruppe zugänglich zu machen. Zudem haben die Schülerinnen und Schüler durch die Vernetzung die Möglichkeit, schnell und unproblematisch selbst erstellte Programme vom eigenen Rechner aus z. B. auf einem Beamer zu präsentieren und mit der Lerngruppe zu diskutieren.

Abb. 2: Sortimentkasten mit Inhalt

Zur Gewährleistung der sozialen Eingebundenheit, die ja, wie oben gesehen, Grundvoraussetzung für motiviertes Handeln ist, arbeiten die Schülerinnen und Schüler gemeinsam bzw. zumindest in Partnerarbeit zusammen.

Unterrichtseinheiten im programmiersprachlichen Teil

Die Unterrichtseinheiten im programmiersprachlichen Teil dienen dazu, dass sich die Lernenden ein Basiswissen über Algorithmen aneignen und die Handhabung und die Software des Raspberry Pi und die verwendeten elektronischen Bauteile kennenlernen. Behandelt werden folgende Themen: Der Raspberry Pi, Grundbausteine von Algorithmen (Sequenz, Wiederholung, Bedingung, Verzweigung, Variablen), Darstellung von Algorithmen (Flussdiagramme), Sensoren/Aktoren.

Die aufeinander aufbauenden Lernsequenzen beinhalten jeweils mehrere problemorientierte Aufgaben auf unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen. In der Regel führt die Lehrkraft kurz in die entsprechende Lernsequenz ein. Nach der eigenständigen Bearbeitung der Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler werden die Lösungen jeweils im Plenum besprochen.

Zu jeder Lernsequenz gibt es Arbeitsblätter, die alle gleich aufgebaut sind. Jede Lernsequenz beginnt mit einem kleinen Input über die nötigen Grundlagen zur Bearbeitung der darauffolgenden Arbeitsaufträge, z. B. zu besonderen Programmierbefehlen, Bauteilen oder Begriffen. Im Anschluss folgen diverse Arbeitsaufträge, deren Schwierigkeitsgrad sich stetig erhöht. Die Schwierigkeitsstufe wird dabei durch ein einfaches Symbolsystem transparent gemacht. Die Differenzierung durch verschiedene Schwierigkeitsstufen pro Lernsequenz stellt den Lernenden einerseits multiple Kontexte zur Verfügung und ermöglicht andererseits eine individuelle Förderung.

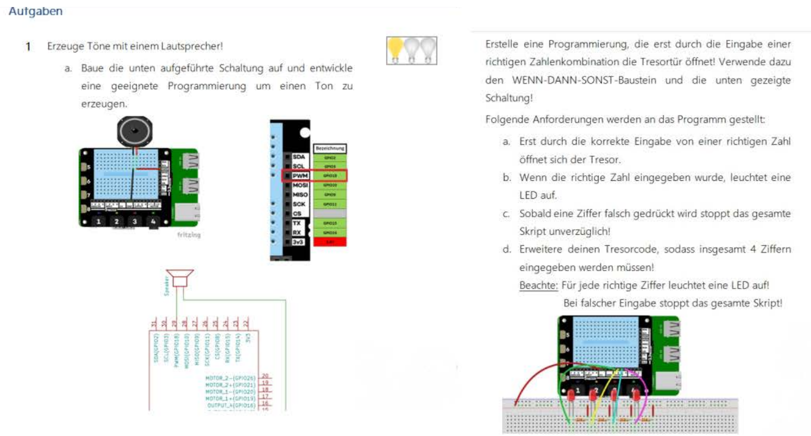


Abb. 3: Beispiele für zwei Aufgabenblätter zu verschiedenen Lernsequenzen

Nachdem die Unterrichtseinheit zu den Grundbausteinen von Algorithmen erfolgreich bearbeitet und abgeschlossen ist, empfiehlt sich der Übergang zur Projektphase.

Die Projektphase

In der Projektphase lassen sich zahlreiche verschiedene Projekte von den Schülerinnen und Schülern umsetzen. Beliebte Projekte sind in diesem Zusammenhang z. B. die Realisierung ferngesteuerter Fahrzeuge, die Steuerung eines Roboterarms, Aufbau einer automatischen Bewässerungsanlage, Realisierung von Ampelsteuerungen und Alarmanlagen. In Abbildung 4 sieht man beispielsweise eine von Schülerinnen entwickelte Alarmanlage, die über einen Infrarotsensor ausgelöst wird. Gerade in dieser Projektphase stehen den Schülerinnen und Schüler viele und unterschiedlich komplexe Umsetzungsmöglichkeiten offen, die eine, an die unterschiedlichen Niveaus angepasste Differenzierung erlauben. In der Regel lassen sich in den gewählten Projektthemen viele der Inhalte der Lernsequenzen aus der programmiersprachlichen Phase, aufgreifen und vertiefen. Die Lehrkraft fungiert in dieser Durchführungsphase hauptsächlich als Berater und Hinweisgeber auf bestimmte Erweiterungsmöglichkeiten.

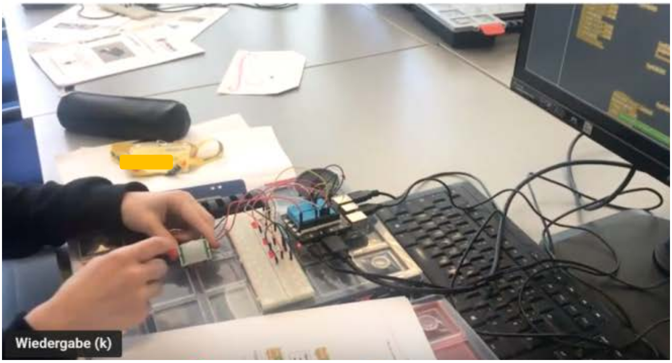


Abb. 4: Projekt: Alarmanlage mit Infrarotsensor

Fächerübergreifende Aspekte

Gerade zu den MINT-Fächern lassen sich vielfältige Verknüpfungen und fächerübergreifende Aspekte finden, die mithilfe des Einsatzes der MicroBerry-Lernumgebung im Unterricht aufgegriffen und transportiert werden können.

Bezüge zum Technikunterricht

Die inhaltliche Nähe zum Technikunterricht begründet sich schon durch die Konzeption der MicroBerry-Lernumgebung, bei der technische Bauteile, wie Sensoren und Aktoren, im Rahmen elektronischer Schaltungen genutzt und gesteuert werden. Im Technikunterricht werden nicht nur die Funktionsweise und der technische Aufbau solcher elektronischer Bauteile thematisiert, sondern auch der Themenkomplex „Steuern und Regeln“. Beide Aspekte lassen sich mit der MicroBerry-Lernumgebung handlungsorientiert erfassen und umsetzen.

Bezüge zum Physikunterricht

Bezogen auf den Physikunterricht sind die inhaltlichen Bezüge zur E-Lehre unübersehbar. Auch das Thema der Messwerterfassung und –auswertung lässt sich mit der MicroBerry-Lernumgebung vielfältig umsetzen. So können beispielsweise analoge Signale eines Ultraschallsensors zur Abstandsmessung erfasst und weiterverarbeitet werden. Auch auf der methodischen Ebene bieten sich Umsetzungsmöglichkeiten. Schülerinnen und Schüler haben viele Möglichkeiten im Rahmen der MicroBerry-Lernumgebung Experimente zu planen und durchzuführen. Dieser Umgang mit Experimenten spielt ja gerade im Physikunterricht eine zentrale Rolle.

Bezüge zum Mathematikunterricht

Das Thema „Algorithmen“, mit dem sich die MicroBerry-Lernumgebung schwerpunktmäßig beschäftigt, spielt ja in der Mathematik ebenfalls eine wichtige Rolle und die Bedeutung von Variablen lassen sich beim Programmieren ganz praktisch und anschaulich erfahrbar machen. Abgesehen davon lassen sich aber zumindest auf inhaltlicher Ebene weitere Themen finden, die mithilfe der Lernumgebung umgesetzt werden können. So ist z. B. das Binärsystem ein Thema, das man auf anschauliche Weise mit der Lernumgebung anwendungsorientiert bearbeiten könnte. Die Idee dabei ist es, einen Code-Wandler anzusteuern und zu programmieren, an dem dann wiederum eine Siebensegment-Anzeige angeschlossen ist. Als Code-Wandler eignen sich binärcodierte Dezimalwandler (BCD), die es in integrierter Form als elektronische Bausteine gibt. Ein solcher Wandler besitzt dann z. B. vier digitale Eingänge für das Einlesen einer vierstelligen Dualzahl und sieben Ausgänge für die Ausgabe des Siebensegment-Codes. Hier kann man dann z. B. experimentell erkundend verschiedene

Dualzahlen einlesen und die Wirkung auf die Siebensegment-Anzeige testen. Auch könnte man in einem weiteren Schritt z. B. einen Dezimalzähler programmieren und in der Anwendung erproben. Abbildung 5 zeigt ein Beispielprogramm für einen solchen Dezimalzähler. Zu sehen ist hier der Programmcode in Scratch, der vier Variablen (A0-A3) im Sekundentakt nacheinander die Dualzahlen 0000 bis 1001 zyklisch zuweist. Die aktuelle Dualzahl wird im Ausgabefenster angezeigt und die angeschlossene Siebensegment-Anzeige zeigt die entsprechende Zahl dezimal an. Empirische Untersuchungen zur Wirksamkeit einer solchen Vorgehensweise stehen noch aus.

Abb. 5: Dualzähler mit Scratch

Auch das Thema des funktionalen Zusammenhangs lässt sich handlungsorientiert erfahrbar machen, wenn man beispielsweise die Abstandsdaten, die ein Ultraschallsensor liefert, graphisch als Funktion des Abstandes (zu einem bestimmten Objekt) in Abhängigkeit der Zeit darstellt. Dies ist mithilfe der Programmiersprache Scratch sehr einfach möglich. Die Idee solcher handlungsorientierter Zugänge zum Funktionsbegriff ist in der Mathematikdidaktik etabliert. Ein zusätzlicher Mehrwert könnte aber darin bestehen, dass sich die Schülerinnen und Schüler für das erfolgreiche Programmieren tiefer in die Thematik einarbeiten müssen. Auch diese Idee bedarf weiterer empirischer Untersuchungen.

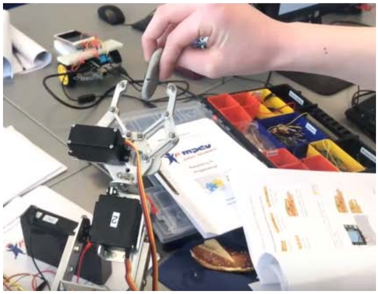


Abb. 6: Roboterarm in Aktion

Als weiteren Ansatzpunkt könnte man Bezüge zur Geometrie herstellen, die sich durch die Notwendigkeit der Orientierung im Raum ergeben, wenn man einen Roboterarm programmieren möchte, der z. B. bestimmte Objekte an vorgegebenen definierten Orten aufnimmt oder von einem Ort zu einem anderen bewegen soll. Inwieweit diese hier vorgestellten Aspekte positive Einflüsse auf das Mathematikverständnis haben könnten, bleibt noch offen. Durch die MicroBerry-Lernumgebung besteht allerdings die Möglichkeit solche Fragestellungen empirisch zu untersuchen.

Evaluation

Am Ende der Projektphase wurden jeweils mit Hilfe eines standardisierten Fragebogens (Prenzel et al. 1996), der auf das Sprachniveau der untersuchten Schülerinnen und Schüler angepasst wurde (Schnirch & Spannagel 2011), die Interessen- und Motivationsvariablen der Schülerinnen und Schüler erhoben, sowie mit offenen Fragen die allgemeine Zufriedenheit mit den Kursen evaluiert. Für die standardisierten Fragen wurde eine sechsstufige Likert-Skala mit der Ausprägung von „nie“ (0) bis „sehr häufig“ (5) verwendet.

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Ausprägung der Lernmotivation von 62 Schülerinnen und Schülern dargestellt. Die drei Variablen „Interesse“ „Intrinsische Motivation“ und „Identifizierte Motivation“ sind Ausprägungen einer selbstbestimmten Motivation. Während mit „Interesse“ das individuelle und dauerhafte Interesse an dem Lerngegenstand erfasst wird, geben die beiden anderen Variablen Auskunft über das situationale Interesse während der Arbeit mit der Lernumgebung. Es zeigt sich, dass die „Intrinsische Motivation“ die höchsten Werte erzielt, so dass man davon ausgehen kann, dass die Schülerinnen und Schüler während der Arbeit mit der Lernumgebung hoch interessiert und motiviert waren. Etwas geringere Werte findet man beim individuellen Interesse. Es ist ja auch nicht zu erwarten, dass nach einem zweitägigen Kurs bereits ein dauerhaftes in der Persönlichkeitsstruktur der Schülerinnen und Schüler verankertes Interesse initiiert werden kann. Allerdings deuten die Ergebnisse darauf hin, dass die MicroBerry-Lernumgebung von den befragten Schülerinnen und Schülern als so interessant empfunden wird, um hoch motiviert damit zu arbeiten und selbstbestimmt zu lernen.

N=62	Interesse	Intrinsische Motivation	Identifizierte Motivation	Introjizierte Motivation	Externale Motivation	Amotivation
Mittelwert	3,5645	4,2930	3,9328	1,9516	,4597	,6559
Median	3,6667	4,6667	4,0000	2,0000	,0000	,3333

Tabelle 1: Ausprägung der Lernmotivation

Die Befunde decken sich mit der Erhebung der Bedingungen für motiviertes Handeln. Auch hier liegen die Werte für wahrgenommene inhaltliche Relevanz, Instruktionsqualität, Kompetenz- und Autonomieunterstützung und wahrgenommene soziale Eingebundenheit im Mittel sehr hoch (siehe Tabelle 2).

N=62	Relevanz	Instruktions-qualität	Autonomie	Kompetenz	Überforde-rung	Soz. Einge-bundenheit
Mittelwert	3,5188	4,0618	3,9147	3,9978	1,0188	4,2696
Median	3,6667	4,0000	4,0714	4,0833	,6667	4,3333

Tabelle 2: Erhebung der Bedingungen für motiviertes Handeln

Erwähnenswert ist noch, dass wir keine signifikanten geschlechtsspezifischen Unterschiede finden konnten, d. h. die MicroBerry-Lernumgebung kann in diesem Sinne als gendergerecht bezeichnet werden.

Die Auswertung der offenen Fragen konnte zeigen, dass das Konzept des freien und selbständigen Arbeitens, die Projektarbeit und die Möglichkeit der praktischen Arbeit häufig als sehr positiv bewertet wurde.

Ausführlicher und detaillierter sind die Ergebnisse in Schnirch, Ridinger & Weschenfelder (im Druck) nachzulesen.

Literatur

Buchholtz, C. (2010). Neue Medien: neues Lernen - neues Handeln: eine explorative Studie zur Veränderung unterrichtlicher Handlungsmuster von Lehrpersonen zum Lehren und Lernen mit neuen Medien. Deutsche Nationalbibliothek. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:11-100177230, Stand: 03.04.2018.

Clancey, W. (1993). Situated action: A neuropsychological interpretation. Response to Vera and Simon. In: Cognitive Science 17. 87-116.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. In: Zeitschrift für Pädagogik, 39. 223-228, 1993.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2002). Handbook of self-determination research. Rochester, NY: University of Rochester Press, 2002.

Fast, L. (2017). Die MPDV Junior-Akademie - Qualifizierung im IT-Bereich. In: tu Zeitschrift für Technik im Unterricht. tu 166/ 4. Quartal 2017, S. 16ff., 2017.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. In: Zeitschrift für Pädagogik, 41, Nr. 6. 867-888, 1995.

GI, Gesellschaft für Informatik e.V. (Hrsg.) (2008). Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule. Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I. Beilage zu LOG IN 28. Jg. (2008), Heft Nr. 150/151, 2008.

Hense, J.; Mandl, H.; Gräsel, C. (2001). Problemorientiertes Lernen, Warum der Unterricht mit neuen Medien mehr sein muss als Unterrichten mit neuen Medien. In: Computer und Unterricht 44/2001, 6-11, 2001.

Hubwieser, P. (2007). Didaktik der Informatik (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.

Krapp, A. (2005). Basic needs and the development of interest and intrinsic motivational orientations. In: Learning and Instruction 15, 381-395, 2005.

Krapp, A. (1998). Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 44. München Basel: Ernst Reinhardt. 185-201, 1998.

Krapp, A.; Prenzel, M. (2011). Research on Interest in Science: Theories, methods, and findings. International Journal of Science Education, 33(1): 27-50, 2011.

Krapp, A. & Ryan, R. M. (2002). Selbstwirksamkeit und Lernmotivation: Eine kitische Betrachtung der Theorie von Bandura aus der Sicht der Selbstbestimmungstheorie und der pädagogisch-psychologischen Interessentheorie. In: Selbstwirksamkeit und Motivationsprozesse in Bildungsinstitutionen. Zeitschrift für Pädagogik. Beiheft 44. Weinheim: Beltz. 54-82, 2002.

Mandl, H., Gruber, H. & Renkl, A. (2002). Situiertes Lernen in multimedialen Lernumgebungen. In: Issing, J. & Klimsa P. (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Weinheim: Beltz, 139-148, 2002.

Poloczek, J. (2015). Fächerverbindende Projekte im Unterricht. In LOG IN. In: Informatische Bildung und Computer in der Schule. Nr. 181/182 (2015). S. 71-76, 2015.

Prenzel, M., Kristen, A., Dengler, P., Ettle, R., Beer, T. (1996). Selbstbestimmt motiviertes und interessiertes Lernen in der kaufmännischen Erstausbildung. In: Beck, Klaus/Heid, Helmut (Hrsg.): Lehr-Lern-Prozesse in der kaufmännischen Erstausbildung: Wissenserwerb, Motivierungsgeschehen und Handlungskompetenzen. Zeitschrift für Berufs-und Wirtschaftspädagogik, Beiheft 13. Stuttgart: Steiner 1996. 108–127.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Krapp, A. & Weidenmann, B. (Hrsg.). Pädagogische Psychologie. Weinheim: Beltz. 601-646, 2001.

Schnirch, A.; Spannagel, C. (2011). Geometrie-Wiki: Prozessorientierte Unterstützung von Geometrievorlesungen. In: Reiss, Kristina (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Münster: WTM-Verlag. S. 735-738.

Schnirch, A.; Ridinger, N. & Weschenfelder, F. (im Druck). Rasperry Pi im Informatik- und Technikunterricht. Konzeption eines handlungs- und problemorientierten Unterrichts mit der MicroBerry-Lernumgebung. Springer Verlag.

Schubert, S.; Schwill, A. (2011). Didaktik der Informatik (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

Tulodziecki, G. (2005). Digitale Medien in einem problem- und fallorientierten Unterricht. In: Dieckmann, B. & Stadtfeld, P. (Hrsg.): Allgemeine Didaktik im Wandel. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 235-251, 2005.

Zendler, A. & Spannagel, C. (2008). Empirical Foundation of Central Concepts for Computer Science Education. *Journal of Educational Resources in Computing, 8*(2), Art. No. 6, 2008.

Messbarkeit eines digitalen Kompetenzgewinnes im hochschulischen Mathematikunterricht für Ingenieure

Christian Steinert

Die Nutzung digitaler Werkzeuge, wie von Online Plattformen, besitzt den Vorteil, dass Lernendendaten zum Umgang mit den Lehrmedien in einer einfach auslesbaren Form vorliegen. Die Daten können so, unter Berücksichtigung des Datenschutzes, ausgewertet werden und erste Schlüsse zu einem möglichen Kompetenzgewinn im Fach Mathematik (z. B. durch regelmäßige Online-Tests), aber auch zum Kompetenzerwerb im Umgang mit den digitalen Werkzeugen gezogen werden. Im Rahmen dieses Beitrages sollen entsprechende Ergebnisse zum Kompetenzzuwachs im Umgang mit digitalen Lernmedien vorgestellt werden.

Definition digitaler Kompetenzen

Der Begriff der Kompetenz wurde auch im deutschen Bildungssystem verankert. Weinert definiert Kompetenzen als,

> *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert, 2001, S. 27 f.).*

Aus dieser Definition wird schnell ersichtlich, dass alle klassischen Lernziele (kognitive, affektive und psychomotorische) in den Kompetenzbegriff inkludiert werden (Bloom, 1976). Allerdings wird sich hier stärker mit den Lernenden und Lernvoraussetzungen, sowie deren Anwendung in den Lebenswelten der Lernenden, als mit dem klassischen Unterricht mit Lernzielen beschäftigt und demzufolge mit Kompetenzen, die Lernende darauf vorbereiten, offene und nicht festgelegte Anforderungssituationen adäquat lösen zu können (Schmoll, 2010). Demzufolge ist es nur richtig, dass bei einer immer stärker werdenden und sich ständig ändernden Digitalität in nahezu allen Lebensbereichen eine Kompetenzorientierung im Unterricht vorgenommen wird. So schwinden die Grenzen zwischen Digital und „Nicht“- Digital immer weiter und gehen sukzessive ineinander über. Daher ist eine klare Definition von digitalen

Kompetenzen schwierig zu treffen. Stöcklin definiert den Begriff Informationskompetenz als:

> *„Fähigkeit, die es ermöglicht, bezogen auf ein bestimmtes Problem Informationsbedarf zu erkennen, Informationen zu ermitteln und zu beschaffen sowie Informationen zu bewerten und effektiv zu nutzen.“* (Stöcklin, 2012)

Nun stellt die Informationskompetenz allerdings nur einen Teilbereich (bzw. je nach Betrachtungsweise einen angrenzenden Bereich) des digitalen Kompetenzbegriffs dar. Unter digitalen Kompetenzen wird mindestens weiter noch der Umgang mit digitalen Medien und die entsprechende Nutzung digitaler Endgeräte gefasst. Im Kontext dieser Arbeit wird der digitale Kompetenzbegriff dahingehend eingeschränkt, dass es sich lediglich um die Kompetenz handelt mit der Studierende das entsprechende Wissen bzw. die Fähigkeit erwerben, um die Mathematikprüfungen im ersten Studienjahr an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg (BTU) erfolgreich zu bestehen. Durch diese Einschränkung findet gleichzeitig eine unmittelbare Verbindung zwischen Digitalen– und Lernkompetenzen statt.

Vorstellung des (digitalen) Lernarrangements an der BTU

Die digitalen Kompetenzen werden im Kontext dieser Arbeit weitestgehend in einem Onlinekurs in der moodle-Plattform der BTU erfasst (Wälder, Steinert & Waschnik, 2017). Den Studierenden der Fächer Elektrotechnik, Maschinenbau und Wirtschaftsingenieurwesen wird innerhalb des Onlinekurses die Möglichkeit gegeben, sich mit mathematischen Inhalten an einem selbstgewählten Ort und zu einer weitestgehend selbstgewählten Zeit außerhalb der Präsenzlehrveranstaltung zu befassen. Einige Materialien haben ein Abgabedatum (Online Tests), so dass die zeitliche Freiheit teilweise eingeschränkt ist. Die Materialien können die Studierenden ebenfalls weitestgehend auf einem frei gewählten Endgerät bearbeiten, so dass eine Bearbeitung an einem heimischen Desktoprechner, aber auch an mobilen Endgeräten wie Laptops, Tablets und Smartphones, möglich ist. Sollten die Studierenden kein Endgerät zur Verfügung haben, besteht die Möglichkeit der Nutzung eines PC-Pools innerhalb der BTU.

Die beiden am häufigsten von den Studierenden genutzten Materialien (Online Tests und Videos) werden im Folgenden detaillierter beschrieben. Im Onlinekurs wurden allerdings auch weitere Materialien wie Simulationen mit Geogebra und Skripte angeboten.

Online Tests

Innerhalb des Onlinekurses wurden verschiedene Arten zum formativen (studienbegleitenden) Testen der Studierendenleistung bereitgestellt. Hierzu zählen u. a. Wissenstests (hier sind keine videobasierten Assessments gemeint), die im Rahmen einer Prüfungszulassung angeboten wurden (Steinert & Kutzner, 2015). Bei den Online Tests handelt es sich um:

Im 1. Semester (in Summe etwa 130 Aufgaben in 19 Tests):

1 Eingangstest (zum Ermitteln der Vorkenntnisse)

14 wöchentliche Belegaufgaben (zur Festigung des Vorlesungsstoffes)

4 komplexe Aufgabenstellungen (als weitere Klausurvorbereitung)

Im 2. Semester:

14 wöchentliche Belegaufgaben (in Summe etwa 90 Aufgaben)

Die Aufgaben der Online Tests richten sich nach den Vorlesungsinhalten und werden, je nach Beendigung der bestimmten Lerneinheiten, freigegeben. In der Regel haben die Studierenden dann zwei Wochen Zeit, die Aufgaben zu bearbeiten. Danach wird der Online Test geschlossen. Zur Prüfung sind die Studierenden zugelassen, die 50 Prozent der Gesamtpunkzahl in den Tests erhalten haben. Sollte dies nicht bei dem ersten Versuch möglich gewesen sein, haben die Studierenden die Möglichkeit, den Online Test beliebig oft zu wiederholen.

Lernvideos

Der Onlinekurs besteht weiter auch aus selbsterstellten Lernvideos, welche mit Interaktionen (direkt im Video integrierte Fragestellungen mit Eingabemöglichkeit oder Verweise zu anderen Videos oder externen Wissensdatenbanken) der Software H5P (H5P.org) angereichert wurden.

Grundsätzlich lassen sich diese Videos in drei Kategorien unterscheiden. Zum einen existieren Kurzfilme, die alle Vorlesungsinhalte der Lehrveranstaltung behandeln, so dass die Studierenden den Stoff auch außerhalb der Präsenzlehre zu einem von den Studierenden selbst gewählten Zeitpunkt wiederholen können. Bei diesen Videos werden die theoretischen Hintergründe auf einer kleinen Tafel, welche auf einem Tisch liegt, handschriftlich mit Kreide hergeleitet.

Eine weitere Videoart stellen Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungsansätzen dar. Diese Videos können sich die Studierenden als Vorbereitung für die Übungen bzw. bei Problemen mit den verpflichtenden Belegaufgaben ansehen. Diese Aufgaben sind ähnlich denen, die die Studierenden als Belege lösen müssen. Am Ende einiger Kurzfilme wird auf entsprechende Beispielaufgaben hypertextuell verwiesen. Andersherum verweisen auch die Beispielaufgaben auf die Theorievideos, welche für das Lösen der Aufgabe relevant sein könnten. Außerdem existiert in jedem Video je nach Länge (i. d. R. sind die Videos drei bis sieben Minuten lang) eine unterschiedliche Anzahl videobasierter Assessments.[1]

Der letzte Typus von Videos sind Musterlösungen der Belegaufgaben, die die Studierenden als Prüfungsvorleistungen abgeben sollten und die nach dem Abgabetermin freigeschaltet werden. Auf diese Weise haben die Studierenden neben den textuellen Lösungen direkt im Online Test ebenso eine kommentierte Schritt-für-Schritt-Lösung in Form eines Videos. Auch in diesen Videos wird auf die entsprechende hypertextuelle Theorie verwiesen.

Folgende Videos wurden für die jeweiligen Semester erstellt:

1. Semester:

---

1 Dieser Videotyp hat das Merkmal, auf das Lernverhalten in Form von Interaktionen mit dem Video durch Lernende zu reagieren (Hattie, Beywl & Zierer, 2013). Die Form der Interaktionsmöglichkeiten erweist sich als mannigfaltig. Videos können auf unterschiedlichste Weise mit Tests angereichert werden. Eine Möglichkeit ist es, dem Lernenden innerhalb eines Videos eine Aufgabenstellung zu geben und diesem Zeit einzuräumen (ggf. auch durch Stoppen des Videos), diese zu bearbeiten. Anschließend wird eine Musterlösung (u. a. auch in einem neuen Video) präsentiert (Denninger, 2017, S. 59)

137 Videos zur Theorievermittlung (Kurzfilme)

60 Videos mit Beispielaufgaben

18 Videos mit Lösungen zu Belegaufgaben

2. Semester:

118 Videos zur Theorievermittlung (Kurzfilme)

57 Beispielaufgaben

14 Videos mit Lösungen zu Belegaufgaben

Erfassung von Daten hinsichtlich digitaler Kompetenzen

Ein digitaler Kompetenzzuwachs wird i.d.R. nicht, wie der fachliche Kompetenzgewinn an Hochschulen, mithilfe einer Abschlussprüfung gemessen. Daher sind implizite Messmethoden, wie Befragungen oder die Erfassung der Nutzung von digitalen Lernmaterialien durch Studierende notwendig. Die Nutzung der Materialien, die im vorherigen Abschnitt beschrieben wurden, wurde daher begleitend und abschließend durch die Studierenden, die die Materialien nutzten, evaluiert. Hierfür fanden Befragungen mithilfe von Evaluationsbögen statt. Weiterhin wurden Daten zur reellen Nutzung der Materialien mithilfe von Datenerfassungsmethoden innerhalb der Lernplattform der BTU gesammelt und ausgewertet. Ziel dieser Methoden war es sichtbar zu machen, welche Materialien wie von den Studierenden genutzt werden und hieraus Schlüsse bzgl. digitaler Kompetenzen zu ziehen.

Befragungen von Lernenden

Zu den digitalen Kompetenzen sind in Summe fünf Befragungen mit Studierenden der BTU durchgeführt worden. Die Anzahl der Befragungen kommt dadurch zustande, dass die Teilnehmer nicht mit zu langen Fragebögen überlastet werden sollten. Es wurden so viele Befragungen durchgeführt, weil die Studierenden während ihrer Studienzeit mit unterschiedlichen digitalen Lernmaterialien konfrontiert wurden und somit ein ggf. anderer Kompetenzerwerb stattgefunden hat. In den Onlinekurs für das WS17/18 und SS18 haben sich 16 Studierende der Elektrotechnik, 13

Studierende des Maschinenbaus und 26 Wirtschaftsingenieursstudierende jeweils im Bachelorstudiengang eingetragen, die an den Befragungen teilnahmen (in Summe 55 Studierende).

Die erste Befragung zum Semesterbeginn fand in Papierform statt. Dies liegt darin begründet, dass die Studierenden zum Semesterstart eher weniger geschult im Umgang mit der Online-Plattform der BTU sind und dies aus Erfahrungen des Autoren dafür sorgt, dass die Teilnehmerzahl aufgrund technischer Hürden geringer ausfällt. Alle weiteren Befragungen wurden Online mithilfe der Lernplattform innerhalb des oben beschrieben digitalen Lernarrangement durchgeführt.

Automatisierte Lernendendatenerfassung mithilfe von Learning Analytics

Unter dem Begriff Learning Analytics werden unterschiedliche Methoden zusammengefasst, die der Sammlung und Interpretation von Lernendendaten dienlich sind. Mithilfe dieser Daten sollen Lernfortschritte messbar gemacht werden, zukünftige Leistungen prognostizierbar sein und besonders im hochschulischen Bereich Abbruchquoten bei heterogenen Gruppen reduziert werden (Johnson et al., 2016).

Das automatisierte Sammeln von Daten bietet sich vor allem in digitalen Umgebungen, wie in Lernplattformen, an. In diesem Zusammenhang sind geltende Regelungen im Bereich des Datenschutzes zu berücksichtigen bzw. die explizite Einwilligung der Lernendenkohorte für die Datenverarbeitung einzuholen (Greller & Drachsler, 2012).

Nach einer Auswertung (z. B. statistische Analysen oder grafische Auswertungen) der gesammelten Daten können den Lernenden weitere Lernmaterialien empfohlen werden. Dies kann vollautomatisch in einem Onlinekurs oder nach Sichtung und Einschätzung einer Lehrperson online oder analog erfolgen. Das Thema Learning Analytics gilt es nun, von der sehr ähnlichen Thematik des Educational Data Mining abzugrenzen. Bei dem Educational Data Mining werden die gewonnenen Daten mit komplexeren statistischen Algorithmen ausgewertet.

Die Ergebnisse werden genutzt, um automatisch adaptive Materialien für Lernende zu erzeugen bzw. bereitzustellen. Verallgemeinernd kann festgehalten werden, dass die Learning Analytics eine ganzheitlichere Betrachtung (inkl. des sozialen Kontextes) vornehmen. Das Educational Data Mining befasst sich mehr mit technischen Prozessen und deren Auswertung im Lernkontext, sowie der automatisierten Verbesserung des Lernprozesses (Liñán & Pérez, 2015).

Die Aufnahme und Anonymisierung der Daten im Kontext dieser Arbeit erfolgten innerhalb der Lernplattform der BTU mithilfe systemeigener Funktionen. Hier wurden die Zugriffe (z. B. das Lesen eines Skriptes, der Aufruf eines Videos oder einer Online Testaufgabe) und Aktivitäten (z. B. Eingaben in Online Tests) über das Semester hinweg täglich von allen Materialien gesammelt.

Eine wichtige Anmerkung, bzgl. der Lernendendatenerfassung für die potentielle Gewinnung von Erkenntnissen zur Entwicklung von digitalen Lernkompetenzen liegt darin, dass lediglich Daten innerhalb der Lernplattform der BTU erfasst werden können. D.h. die Nutzung von externen digitalen Lernmaterialien (wie bspw. YouTube-Videos), die nicht in der Plattform eingebunden sind, kann nicht mithilfe der Datenerfassung aufgezeichnet werden. Die Studierendennutzung solcher Lernmaterialien wurde dennoch mithilfe der im vorigen Abschnitt beschrieben Fragebögen in Ansätzen erfasst. Eine Vollerfassung wäre hier nur schwer möglich, da hierfür eine vollumfängliche Beschreibung und Erfassung aller möglichen digitalen Lernmaterialen in Fragebogenform notwendig gewesen wäre.

Darstellung und Auswertung der Ergebnisse der erfassten Daten

Nachdem die Studierenden die interaktiven Lernvideos weitestgehend positiv eingeschätzt haben, wurde mithilfe der Learning Analytics im Onlinekurs die tatsächliche Nutzung dieser Videos untersucht (Abbildung 1).

Aus dieser Abbildung wird ersichtlich, dass die Hauptnutzung im Kurs die verpflichtenden Online Tests mit 91 Prozent aller Zugriffe darstellen. Am nächsthäufigsten folgen bereits die Videos mit einem Nutzungsanteil von lediglich drei Prozent (die Gründe hierfür werden im folgendem diskutiert).

Die weiteren Materialien im Kurs, wie Texte (z. B. Skripte) und Abstimmungen zu Terminen bzw. zum weiteren Kursverlauf, weisen mit je zwei Prozent eine ebenfalls relativ geringe Nutzungshäufigkeit im Kurs auf.

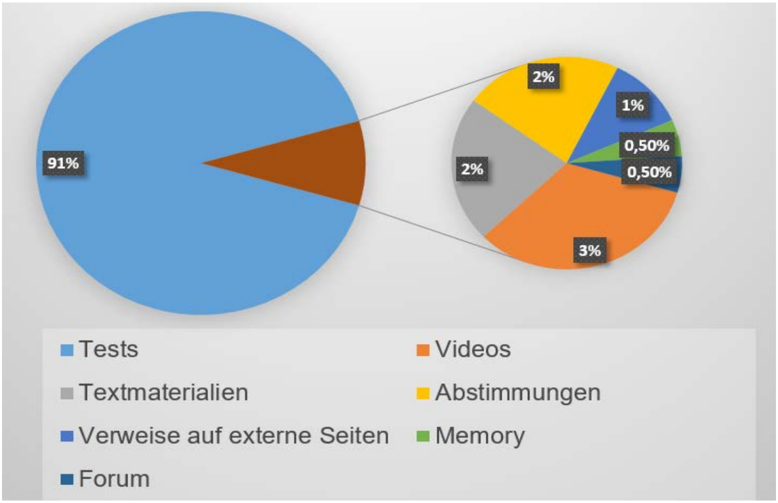


Abb. 1: Relative Anzahl der Zugriffe auf die Materialien im Onlinekurs

Da die Online Tests verpflichtend und die Videonutzung freiwillig war, kann hier bereits ein erster Schluss bzgl. der Nutzung von digitalen Lernmaterialien von Studierenden gezogen werden. Ein entsprechender Anreiz (hier die Pflicht zur Bearbeitung um zur Prüfung zugelassen zu werden) hat eine stärker lenkende Wirkung als die pure Freiwilligkeit in der Bearbeitung. Dieses Problem tritt nicht nur an der BTU auf, so gibt Gerads ein ähnliches Verhalten der Studierenden an der RWTH Aachen bei der Nutzung von Serious Games wieder, bei denen „*ohne positiven Zwang* (z. B. Prüfungszulassung oder Bonuspunkte) *nichts ginge*“ (Gerads, 2017).

In einer weiteren Befragung sollten die Studierenden der BTU (vgl. Befragung von Lernenden) nun eine Reihung der für sie wichtigen Lernformen (hier wurden sowohl Arten der Präsenz- als auch von digitalen Lernformaten zur Auswahl gestellt) mithilfe einer Skala (1 – besonders wichtig bis 8 – unwichtig im Lernkontext) vornehmen. Mit einer durchschnittlichen Bewertung von 2.5 wurden Vorlesungen und Übungen von den Studierenden als wichtigste Form für den Erwerb von Wissen gewählt. Es folgen die Online Testaufgaben mit einer durchschnittlichen Bewertung von 3.7. Lernvideos mit einer Durchschnittsbewertung von 5.6 werden neben Lernapps (6.3) als weniger wichtiges Lernmedium betrachtet.

Zum Fakt, dass die Online Tests von den Studierenden der BTU als wichtiger erachtet werden als Videos gilt es dahingehend hervorzuheben, da die Studierenden zu ihrem Studienbeginn angaben, dass diese bisher weitestgehend nicht mit solchen Online Tests in Ihrer bisherigen Bildungsbiographie gearbeitet hatten.[2] Ein bedeutend größerer Anteil der Studierenden (68 Prozent) gab an, dass diese bereits vor Ihrem Studium mit Videos gelernt hatten. Am Ende des ersten Studienjahres haben alle Studierende der Kohorte mit Online-Tests und Lernvideos gearbeitet.

Weiterhin kann durch den eben beschriebenen Sachverhalt festgehalten werden, dass entsprechende Anreize (hier die verpflichtende Bearbeitung eins Mediums) einen stark lenkenden Einfluss hinsichtlich des bisherigen digitalen Lernmedienkonsum von Studierenden und der Entwicklung dieses Medienkonsums haben.

In einer gesonderten Befragung wurden die Studierenden mit der vergleichsweise geringen Videonutzung im Online-Kurs konfrontiert. Die Studierenden gaben hier an weder mit der Qualität noch dem Inhalt der Videos Probleme gehabt zu haben. Vielmehr hatten die Studierenden Schwierigkeiten dabei die Videos im Kurs aufzufinden. Die Studierenden gaben an, dass Ihnen eine indizierte Suche im Online Kurs fehlte.[3] Eine solche Suchfunktion waren die Studierenden in ihrem herkömmlichen Umgang mit digitalen

2 Lediglich ein Studierender der in „Befragung von Lernenden“ beschrieben Kohorte hat vorher mit Tests als Lernmedium gearbeitet.

Medien, wie bei YouTube oder Google, gewohnt. Hier kann für die Studierenden der BTU festgehalten werden, dass Schulmeisters (2008) Erkenntnis bzgl. der nicht stärker ausgeprägten digitalen Lernkompetenzen bei jüngeren, medienaffineren Generationen zwar weiter gelten, diese Generation aber dennoch Präferenzen bzgl. digitaler Lernmedien aufweist. Diese Präferenzen sind von der bisherigen Mediennutzung der Lernenden abhängig.

Weiter gaben die meisten Studierenden an, dass der wichtigste Anreiz für die Nutzung von Lernvideos eine stärkere Verknüpfung mit den Online Tests ist. So können bspw. die Videos als zusätzliche Hinweisstellung dienen, indem diese in Rückmeldungen an die Studierenden verarbeitet werden oder mithilfe (hypertextueller) Verweise aus den Online Testaufgaben heraus zu einem Video, welches für die Lösung des Online Tests notwendig ist, mit einem spezifischen Inhalt verlinkt werden. Diese Studierendenaussage ist dahingehend relevant, da u.a. interpretiert werden kann, dass ein Anreizsystem (wie bei den Online Tests) für die Studierenden als Orientierung notwendig ist. Eine andere Interpretationsweise ist die, dass die Studierenden sich eine engere Verknüpfung und damit einfachere Zugänglichkeit zwischen den einzelnen Online Materialien wünschen.

Fazit

Nachdem zu Beginn dieser Arbeit der digitale Kompetenzbegriff definiert wurde, sind Möglichkeiten für eine Messung eines digitalen Kompetenzgewinns beschrieben und erste Ergebnisse einer solchen Messung präsentiert worden. Die größte Schwierigkeit bei der Messung eines digitalen Kompetenzzuwachses im Sinne dieser Arbeit liegt darin, dass dieser in den Mathematikprüfungen an Hochschulen lediglich implizit gemessen werden kann. Eine klassische Abschlussprüfung, ob die entsprechenden Kompetenzen erfolgreich erworben wurden, findet i.d.R. nicht statt. Mithilfe von Fragebögen und der Lernendendatenerfassung innerhalb der Lernplattform der BTU, konnten Erkenntnisse zur

3 Die Möglichkeit der Verschlagwortung in Verbindung mit einer Suchfunktion existierte zu dem Zeitpunkt innerhalb der Lernplattform der BTU nicht. Die Videos wurden mithilfe eines Kategoriebaumes innerhalb des Online Kurses angeboten.

Kompetenzentwicklung gesichert werden. So gilt es festzuhalten, dass Anreizsysteme zur Nutzung digitaler Lernmedien einen stark lenkenden Einfluss auf die Nutzung und damit verbunden, einen stärkeren Kompetenzzuwachs im Umgang mit digitalen Medien nehmen.

Bedeutung für die weitere Entwicklung von Curricula

An der BTU ist aufgrund der im Curriculum vorgeschrieben Voraussetzungen für die Teilnahme an den Mathematikprüfungen ein Anreizsystem für den verpflichtenden Umgang mit digitalen Lernmedien (hier Online Tests) geschaffen worden. Die Schaffung vergleichbarer Voraussetzungen ist auch für andere digitale Lernmedien denkbar. So könnte bspw. eine Mindestanzahl von angesehenen Minuten (ausgewählter Videos) eine im Curriculum verankerte Prüfungszulassung bilden. Die Sinnhaftigkeit eines solchen Instruments gilt es nicht nur bzgl. rein technischer/didaktischer Fragestellungen (z. B. ob sich die Videos tatsächlich angesehen werden) zu diskutieren, sondern auch aus studienorganisatorischer Sicht zu beleuchten. Sollten solche Anreize tatsächlich die gewünschte lenkende Wirkung besitzen und die Studierenden sich verstärkt mit digitalen Lernmedien befassen, würde die Gefahr bestehen, dass die Studierenden die im Mathematikunterricht zusätzlich aufgebrachte Zeit in anderen Fächern mit einem Minderaufwand kompensieren und so in diesen Fächern schlechtere Leistungen erbringen. In diesem Kontext gilt es weiter zu diskutieren, ob die Mathematikausbildung an Hochschulen einen so integralen Bestandteil für das Verständnis anderer Fächer bildet und somit die hier zusätzlich aufgebrachte Zeit der Studierenden zu rechtfertigen ist.

Literatur

Bloom, B. S. (1976). *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich*. Weinheim und Basel: Beltz.

Denninger, M. (2017). *Umsetzung des Flipped Classroom Konzepts mit Lernvideos im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Masterthesis*. Wien: Donau-Universität Krems.

Gerads, M. (23. Mai 2017*). Contentproduktion – wie entstehen digitale Bildungsmaterialien an Hochschulen?* Von https://www.e-teaching.org/community/communityevents/-onlinepodium/contentproduktion abgerufen am 27. November 2019.

Greller, W. & Drachsler, H. (2012). Translating learning into numbers: A generic framework for learning analytics. *Journal of Educational Technology & Society* 15(3), 42 – 57.

Hattie, J., Beywl, W. & Zierer, K. (2013). *Lernen sichtbar machen*. Hohengehren: Schneider-Verlag.

Johnson, L., et al. (2016). *NMC horizon report: 2016 higher education edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium.

Liñán, L. C. & Pérez, Á. A. (2015). Educational Data Mining and Learning Analytics: differences, similarities, and time evolution. *Journal of Educational Technology in Higher Education*, 12(3), 98 – 112.

Schmoll, D., et al. (2010). »Fast wie im richtigen Leben ...«. *Kompetenzorientiert lernen und prüfen im evangelischen Religionsunterricht*. Erlangen, Gymnasialpädagogische Arbeitsstelle, 5.

Steinert, C. & Kutzner, T. (2015). Dynamische E-Tests als Methode der Studienbegleitung im ersten Semester. *E-Didaktik-Tagung "Lehre auf neuen Wegen"*. Göttingen: Universität Göttingen.

Stöcklin, N. (2012). Informations-und Kommunikationskompetenz–das «Lesen und Schreiben» der ICT-Kultur. *Medienpaedagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung*, 1-13.

Schulmeister, Rolf (2008): Gibt es eine „Net Generation"? *Version 3.0*. Von http://epub.sub.uni-hamburg.de/epub/volltexte/2013/19651/pdf/schulmeister_net_generation_v3.pdf abgerufen am 27. November 2019.

Wälder, O., Steinert, C. & Waschnik, C. (2017). Best Practice: Synergien aus Präsenz-und digitaler Lehre in der hochschulischen Mathematikausbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 43(102), 12 – 14.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schule* (S. 17 – 31). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Gute Aufgaben für digitale Prüfungen in der Mathematik

Kirsten Winkel

Nicht nur beim Lehren und Lernen von Mathematik, sondern auch beim Prüfen lohnt sich der Einsatz digitaler Werkzeuge. Diskutiert wird in diesem Beitrag, wie Aufgaben mit geschlossenen Antwortformaten so gestaltet werden können, dass sie mathematisches Verständnis und Begründungen in digitaler Form prüfen können. Anhand geeigneter Aufgabenbeispiele aus der Grundschule, der Sekundarstufe I und der Hochschule werden Chancen digitaler Prüfungen exemplarisch aufgezeigt.

Digitale Erfassung mathematischer Kompetenzen

Prüfungen haben ein enormes Potential, das Lernverhalten zu steuern. Fragen von SchülerInnen oder Studierenden, ob etwas in der Klassenarbeit oder der Klausur drankommt, sind übliche Fragen, mit denen Lehrende nicht selten konfrontiert werden. Arbeiten Lehrende kompetenzorientiert und haben eine klare Vorstellung davon, was sie erreichen wollen, können sie mit ihrer Antwort die Lernziele offenlegen und dabei zentrale Kompetenzen hervorheben, indem sie diesen eine hohe Wahrscheinlichkeit zuschreiben, prüfungsrelevant zu sein. Die Lernenden profitieren ebenfalls von einer derart transparenten und effizienten Kompetenzorientierung (Ehlers et al. 2013), weil es auch in ihrem Sinne ist, sich umso intensiver mit den Themen auseinander zu setzen, je wichtiger sie sind.

In der Fachliteratur wird das Phänomen häufig mit „Assessment drives learning" charakterisiert und Forschungsergebnisse zeigen, welches Steuerungspotential Prüfungen und zugehörige Erwartungshaltungen haben können (z. B. Jürges et al. 2012, Boud 1995). Dasselbe Phänomen tritt nicht nur auf Seite der Lernenden auf, sondern ebenso auf Seite der Lehrenden:

> *„Es besteht die Tendenz nur das zu unterrichten, was auch geprüft wird (teaching to the test)." (GDM & MNU 2010, S. 2)*

Auch Lehrende orientieren sich in ihrem Unterricht demnach stark daran, die Lernenden auf zentrale Prüfungen vorzubereiten. Aber selbst Lehrende, die eine kritische Haltung gegenüber dem Testen haben und denen die intrinsische Motivation ihrer SchülerInnen oder Studierenden wichtiger ist, werden sich der Kraft dieser extrinsischen Motivation, die von Prüfungen ausgeht, nicht ganz entziehen können. Daher sind gute Aufgaben in Prüfungen von zentraler Bedeutung – nicht nur zur Bewertung von Lernleistungen, sondern ebenso zur Lenkung des Lernverhaltens. Je mehr dabei die Lernziele, das Unterrichtshandeln sowie Prüfungen während und am Ende des Lernprozesses konsistent aufeinander abgestimmt sind, desto transparenter werden die Lernziele für die Lernenden und desto stärker wird sich das Lernverhalten daran ausrichten. Eine derart systematische Angleichung zwischen Lernzielen, Lernprozessen und Prüfungen beschreibt das Konzept des *Constructive Alignments* (Biggs 1996). Es beruht auf einem konstruktivistischen Lehr-Lernverständnis und zeichnet sich dadurch aus, dass nicht nur Lehren und Lernen aufeinander abgestimmt sein sollen, sondern – aus zuvor genannten Gründen – ebenso das Prüfen. Aktuell wird diese insbesondere auch im Kontext digitaler Prüfungen thematisiert, z. B. in der KMK-Strategie „Bildung in der digitalen Welt“:

> *„In dem Maße, in dem das Arbeiten in digitalen Lernumgebungen zur Selbstverständlichkeit in schulischen Bildungsprozessen wird, werden sich entsprechend neue Prüfungsformate bzw. neue Aufgabenformate für Prüfungen entwickeln.“ (KMK 2016, S. 9)*

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik unterstützt diesen Vorstoß und regt darüber hinaus an, verschiedene Prüfungsformate mit digitalen Technologien zu analysieren (GDM 2017, S. 41). Dieses Ziel verfolgt auch der vorliegende Beitrag anhand von exemplarischen digitalen bzw. digitalisierbaren Prüfungsaufgaben.

Um Lernende auf neue digitale Prüfungen und neue Frageformate vorzubereiten, ist es im Sinne des *Constructive Alignments* hilfreich, dass die Aufgabentypen nicht erstmalig in den eigentlichen Abschlussprüfungen auftauchen, sondern schon im Vorfeld als digitale Übungsaufgaben, Self-Assessments oder Probeklausuren integriert werden (Daniel et al. 2014, Wannemacher 2007). Derartige Prüfungen zum Lernfortschritt mit förderndem Charakter werden als *formatives Assessment* bezeichnet. Hauptzweck ist es, dass Lehrende und Lernende schon während des Lernprozesses Feedback über die Stärken und Schwächen bekommen und dieses in ihre Entscheidungen über weitere Schritte zum (gemeinsamen bzw. individuellen) Kompetenzerwerb einbeziehen (Black & Wiliam 2009, Moss & Brookhart 2019). Die Rolle von digitaler Technologie beim formativen Assessment wurde im Kontext des designbasierten Forschungsprojekts FaSMEd über verschiedene Zugänge umfassend fundiert (Aldon 2019). Herausgearbeitet wird im FaSMEd-Framework in einer Dimension die Rolle von SchülerInnen, Lehrkräften und MitschülerInnen beim digitalen formativen Assessment. In einer zweiten Dimension wird in Anlehnung an Wiliam & Thompson (2008) unterschieden zwischen fünf zentralen Assessment-Strategien. Sie beziehen sich auf didaktische Funktionen, die dem formativen Assessment zukommen: Neben Feedback und Aktivierung der Lernenden kann das Assessment ebenso als Grundlage für Diskussionen im Klassenverband dienen. Eine dritte, technische, Dimension des FaSMEd-Frameworks erfasst die Funktionalitäten der Technologie; in dieser Dimension wird zwischen dem Senden und Anzeigen, dem Auswerten, sowie der interaktiven Lernumgebung unterschieden.

Bei digitalen formativen Assessments (ebenso wie bei *summativen Assessments*, also Abschlussprüfungen) handelt es sich bislang in der Praxis meist um Aufgaben mit eher geschlossenen Antwortformaten mit eindeutig definierten Lösungsmengen. Die Vorteile von Digitalisierung liegen für dieses Format klar auf der Hand: Durch eine (teil-)automatisierte Auswertung kann auch in großen Lerngruppen ein sehr zeitnahes, individuelles Feedback (bei gleichzeitiger Reduktion des Korrektur-aufwandes) erfolgen. Zudem stoßen formative Self-Assessments auf hohe Akzeptanz bei Studierenden und gehören zu den effektivsten und nachhaltigsten Lernmethoden (Daniel et al. 2014, Dunlosky et al. 2013). Gängige Lernplattformen wie ILIAS oder Moodle bieten für diese Aufgabentypen die notwendige technische Unterstützung (Ehlers et al. 2013). Ergänzt werden sie durch sogenannte „STACK-Plugins“, die es ermöglichen, über die Anbindung eines Computer-Algebra-System algebraisch äquivalente Lösungen zu erkennen und richtig auszuwerten (z. B. Weigel et al. 2018). Auf der anderen Seite bergen diese technischen Möglichkeiten in der Praxis auch die Gefahr, dass Mathematik vorschnell auf schlichte Rechnungen und Faktenwissen reduziert wird, weil diese digital besonders einfach prüfbar sind. Was im Kontext speziell von Multiple-Choice-Aufgaben häufig unterschätzt wird, ist der zeitliche Aufwand vorab und die notwendige *diagnostische Kompetenz* (i. S. v. Helmke 2012) sowie das fachdidaktische Wissen, um gute Prüfungsaufgaben mit geschlossenen Antwortformaten und dennoch hohem diagnostischen Wert zu entwickeln:

> *„Zur Entwicklung solcher Lernangebote bedarf es aber eines fachdidaktischen Wissens um die Vielfalt möglicher Lern- und Irrwege, die ein Lernender in der Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten nehmen kann. Lernen wird dann effektiver, wenn das Feedback situativ optimiert wird, das potentielle Leistungsvermögen auf der Grundlage von Erkenntnissen aus der fachdidaktischen Forschung antizipiert wird und damit Rückmeldungen passend zum individuellen Leistungsstand gegeben werden können.“ (GDM 2017, S. 41)*

Insbesondere wenn es nicht nur um das Abprüfen von Faktenwissen oder einfachen Rechnungen geht, sondern um eine Erfassung von mathematischem Verständnis, Begründungen oder Vorstellungen, ist der Aufwand zur Entwicklung z. B. einer typischen Lückentext- oder Multiple-Choice-Aufgabe ungleich höher als der einer Aufgabe mit offenem Antwortformat und Mitberücksichtigung des Lösungsweges. Eine gute digitale Prüfungsaufgabe sollte während des Lösungsprozesses divergente Denkprozesse zulassen und zum Schluss dennoch zu einer eindeutig definierbaren Lösungsmenge zu verdichten sein. Diese Lösungsmenge sollte sich (beim aktuell üblichen technischen Standard) in der Regel als Zahl, als Intervall oder als recht einfacher mathematischer Ausdruck in einer Textlücke darstellen lassen oder gar als eine explizit vorgegebene Antwortoption zur Auswahl gestellt werden können. Eine Herausforderung bei der Entwicklung von Multiple-Choice-Aufgaben besteht darin, fehlerhafte Antwortalternativen so zu antizipieren und zu konstruieren, dass ihnen typische Fehler oder Fehlvorstellungen zu Grunde liegen, so dass im Idealfall Rückschlüsse auf wahrscheinliche Fehler oder Wissenslücken möglich werden. In der Chemiedidaktik haben Marohn & Schmidt (2003)

„Kriterien für eine Multiple-Choice-Aufgabe zur Diagnose von Schülervorstellungen“ aufgestellt. Ein Kriterium ist beispielsweise, dass die (sich gegenseitig ausschließenden) Auswahlantworten vorab durch eine analoge offene Aufgabe empirisch zu ermitteln sind. Wie groß der Aufwand bei der Erstellung guter Multiple-Choice Aufgaben insgesamt ist, lässt sich erahnen, wenn man z. B. feststellt, dass die Autoren im Verlauf einer ausführlichen Studie 25 gute Multiple-Choice-Aufgaben entwickeln konnten, die ihren Kriterien genügen.

Weitere aktuelle Forschung – hauptsächlich im Rahmen des o. g. FaSMEd-Projekts – in der Mathematikdidaktik befasst sich beispielsweise mit der Frage, wie auch Aufgaben mit offenen Frageformaten nach einer gründlichen Analyse und Kategorisierung der Schülerantworten durch Experten eine automatisierte Diagnose ermöglichen (Olsher 2019, Yerushalmy et al. 2017). Für den Inhaltsbereich des Funktionalen Denkens wurde auf Basis typischer Fehlvorstellungen ein digitales Selbst-Assessment (SAFE-Tool) entwickelt und evaluiert, das gezielt auch metakognitive Strategien in die interaktive Lernumgebung mit einbezieht (Ruchniewicz & Barzel 2019). Cusi et al. (2017, 2019) zeigen auf, wie digitale kooperative Arbeitsblätter und Umfragen so gestaltet werden können, dass sie auch während einer Klassendiskussion als formatives Assessment genutzt werden können. Weitere Projekte gehen der Frage nach, wie mit Hilfe digitaler Werkzeuge ein individuelles Feedback lernförderlich so gestaltet werden kann, dass es bei diagnostizierten Fehlvorstellungen im Sinne der *Conceptual Change Theorie* Umdenkprozesse aktivieren und helfen kann, die Fehlvorstellungen zu überwinden (Johlke 2018).

Der vorliegende Beitrag richtet seinen Fokus hauptsächlich auf Aufgaben mit geschlossenen Antwortformaten. Ziel ist es, die Möglichkeiten, die diese mit Blick auf die zuvor skizzierten theoretischen Anforderungen bereits bieten, an Aufgabenbeispielen für verschiedene Altersstufen zu verdeutlichen. Dazu werden nachfolgend geeignete Aufgabenbeispiele aus der Grundschule, der Sekundarstufe I und der Hochschule angeführt und analysiert.

Grundschule: Problemlösen und Multiple-Choice-Aufgaben

Nicht nur unter Lehrkräften begegnet man häufig der Fehlvorstellung, dass Aufgaben höherer Anforderungsbereiche, die divergente Rechenwege anregen sollen, nicht zu Aufgabentypen mit geschlossenen Antwortformaten passen. Das womöglich bekannteste Gegenbeispiel zeigt seit vielen Jahren der „Känguru-Mathematikwettbewerb“, an dem jährlich weltweit SchülerInnen ab Klassenstufe 3 teilnehmen (www.mathe-kaenguru.de). Er besteht ausschließlich aus Problemlöseaufgaben und diese werden ausschließlich im Multiple-Choice-Format gestellt (s. Abb. 1).

Im Flughafen wird eine Seite eines Ganges gereinigt. Dazu wurde ein Absperrband genau in der Mitte des Ganges gespannt (siehe Bild). Wie lang ist das Band?

(**A**) 71 m (**B**) 75 m
(**C**) 81 m (**D**) 83 m (**E**) 89 m

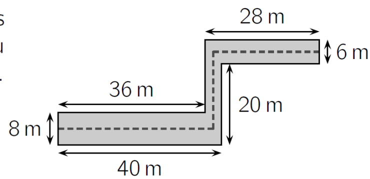


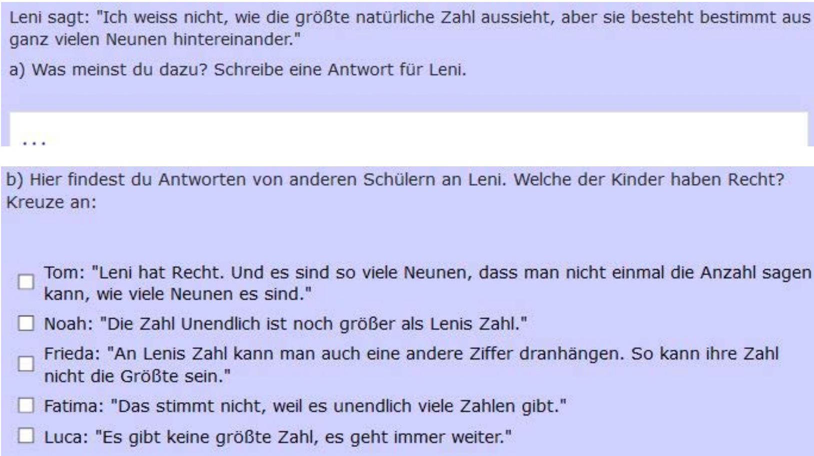
Abb. 1: Aufgabenbeispiel aus dem Känguru-Mathematikwettbewerb für Klassenstufen 3 & 4 (Altmann et al. 2019, S. 8)

Die mittlerweile über 3000 Wettbewerbsaufgaben belegen, dass das Multiple-Choice-Format nicht nur dem Abfragen von Routinewissen oder schlichten Rechenergebnissen vorbehalten ist. Im Wettbewerb selbst wird derzeit noch auf Papier gearbeitet, aber zu Trainingszwecken stehen Aufgaben der Vorjahre digital zur Verfügung. Zu untersuchen, wie so ein digitaler Aufgabenpool zur Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts und zur individuellen Förderung beitragen kann, wenn er mit Feedbackfunktionen, geschickter Adaptivität und fachdidaktischen digitalen Werkzeugen verknüpft wird und im differenzierenden Unterricht gezielt auch in kooperativen Lernformen eingesetzt wird, wäre sehr aufschlussreich, um zukünftige digitale Lernumgebungen evidenzbasiert zu gestalten.

Sekundarstufe I: Diagnose & Förderung digital

In der Sekundarstufe I werden kompetenzorientierte Aufgaben, die mathematisches Verständnis prüfen und geeignet digitalisierbar sind, nicht nur für internationale Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA entwickelt. Ein gutes Beispiel für Prüfungsaufgaben, die fachdidaktisch-theoriegeleitet und kognitionsorientiert konzipiert sind und darüber hinaus bereits systematisch mit einer diagnosegeleiten individuellen Förderung im Sinne des *Constructive Alignments* verknüpft sind, bietet beispielsweise der „Lernstand 5“ aus Baden-Württemberg (Schulz et al. 2019). Das Operations- und Zahlverständnis wird zu Beginn von Klasse 5 mit einem Test erfasst, um anschließend mit systematisch darauf abgestimmten Lernmaterialien Verständnisdefizite aus der Grundschulzeit aufzuarbeiten. Auch diese Prüfung wird bislang nicht digital durchgeführt, aber die Vorteile einer Digitalisierung dieses Konzeptes liegen auf der Hand.

Ein zweites Beispiel aus der Sekundarstufe I soll veranschaulichen, wie Digitalisierung auch bei Prüfungsaufgaben mit offenem Antwortformat gewinnbringend eingesetzt werden kann, wenn sich Antworten als Fließtext schreiben lassen. In der Aufgabe in Abb. 2 sollen die SchülerInnen zunächst in einem offenen Format schriftlich Stellung zu einer Fehlvorstellung nehmen. Die Schülerlösungen können der Lehrkraft im Korrekturmodus als Liste angezeigt werden und wie gewohnt einzeln bewertet werden. Gleichzeitig kann diese Liste der Lehrkraft dazu dienen, Schülerlösungen und typische (Fehl-)Vorstellungen zu extrahieren und diese im formativen Sinne für das weitere Lernen zu nutzen: In der Lerngruppe selbst können ausgewählte Schülerlösungen auf plausible Weise als Ausgangspunkt für eine Klassendiskussion aufbereitet werden. Für eine neue Lerngruppe können die extrahierten Schülerlösungen viel naheliegender als bei papierbasierten Prüfungen dazu dienen, eine neue Aufgabe zu entwickeln, die – trotz geschlossenen Antwortformats – diagnostische Einsichten in tieferes Verständnis ermöglichen kann und bei der metakognitive Kompetenzen wie das Nachvollziehen von Argumenten von MitschülerInnen gefordert werden (siehe Aufgabenteil b).



Leni sagt: "Ich weiss nicht, wie die größte natürliche Zahl aussieht, aber sie besteht bestimmt aus ganz vielen Neunen hintereinander."

a) Was meinst du dazu? Schreibe eine Antwort für Leni.

...

b) Hier findest du Antworten von anderen Schülern an Leni. Welche der Kinder haben Recht? Kreuze an:

- ☐ Tom: "Leni hat Recht. Und es sind so viele Neunen, dass man nicht einmal die Anzahl sagen kann, wie viele Neunen es sind."
- ☐ Noah: "Die Zahl Unendlich ist noch größer als Lenis Zahl."
- ☐ Frieda: "An Lenis Zahl kann man auch eine andere Ziffer dranhängen. So kann ihre Zahl nicht die Größte sein."
- ☐ Fatima: "Das stimmt nicht, weil es unendlich viele Zahlen gibt."
- ☐ Luca: "Es gibt keine größte Zahl, es geht immer weiter."

Abb. 2: Beispiel für eine Freitextaufgabe zum Argumentieren (Teil a) und eine zeitlich nachfolgende Multiple-Choice-Aufgabe, die basierend auf Schülerlösungen aus Teil a entwickelt wurde (Das Beispiel ist angelehnt an eine Aufgabe aus einer Klassenarbeit sowie handschriftliche Schülerlösungen aus Jahrgang 5, dokumentiert in der Unterrichtsdatenbank MUMAS (s1495) (Kaune 2005).

Die an diesem Beispiel skizzierte Vorgehensweise zur Entwicklung von Prüfungsaufgaben eignet sich ebenso für andere Schülerbegründungen oder -reflexionen z. B. über Darstellungswechsel, die zuvor mit digitalen mathematischen Werkzeugen vorgenommen worden sind. In Kombination mit dem o. g. Ansatzes zum Überwinden von Fehlvorstellungen von Johlke (2018) ließe sich digital realisieren, dass SchülerInnen abhängig von ihren Antwortmustern Folgeaufgaben präsentiert bekommen, die geeignet sind, um ihre Fehlvorstellungen zu überwinden.

Hochschule: Alignment von formativem und summativem Assessment

Im Bereich der Hochschule wird digitales Prüfen im Kontext von Online-Brückenkursen, digitalen Übungsblättern, E-Voting-Tools und E-Klausuren diskutiert und an einigen Hochschulstandorten auch intensiv praktiziert. Dazu zählt auch die Universität Mainz, an der ich selbst seit über 5 Jahren Erfahrungen mit dem digitalen Prüfen in Mathematik-Großveranstaltungen sammeln durfte. Die nachfolgende exemplarische Aufgabe zur Analysis prüft das Verständnis von Ableitungen und deren Eigenschaften. In der Vorlesung wurden vorher digitale Werkzeuge zur dynamischen Veranschaulichung der sich verändernden Tangentensteigung eingesetzt, bei der eine Studentin die Ableitung passend als eine Funktion beschrieben hat, die an jeder Stelle so hoch ist wie die Tangente an der Ursprungsfunktion steil ist. Studierende gelernt, warum eine Wendestelle beim Ableiten zu einer Minimum- oder Maximumstelle und diese beim erneuten Ableiten zur Nullstelle wird. Um als Lehrende während der Vorlesung Rückmeldung zu bekommen, inwieweit die Studierenden dabei ein hinreichendes Verständnis entwickelt haben, wurde am nächsten Vorlesungstag eine Aufgabe als Live-Voting gestellt, bei der die Studierenden die Eigenschaften in einer Grafik prüfen sollten (Abb. 3).

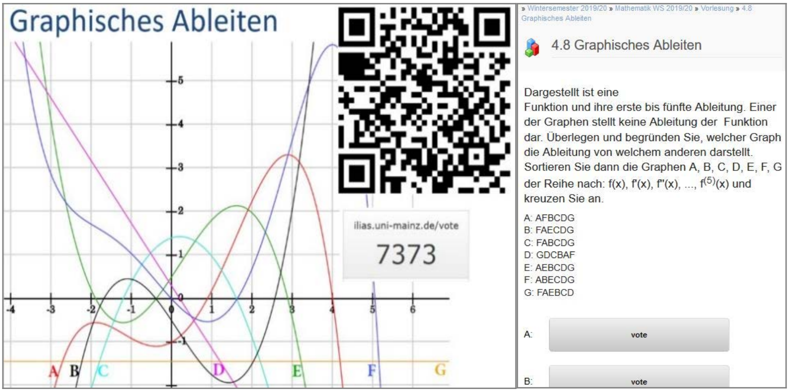


Abb. 3: Formatives Assessment zum Verständnis von Ableitungen während einer Vorlesung, links: Darstellung auf Beamer, rechts: Darstellung auf Smartphone der Studierenden

Die Trennung zwischen der Grafik auf der Projektionsfläche und der Auswahlmöglichkeiten hat lediglich technische Gründe, weil es zuvor bei der Anzahl Studierender zu längeren Ladezeiten kam. Die Verdichtung der recht anspruchsvollen Anforderungen zu genau einer richtigen Antwort ist ausgerichtet auf das Format des Live-Votings. Hier hat es sich in der Praxis gezeigt, dass komplexere Aufgaben mit genau einer Lösung den stärksten

Aufforderungscharakter zum Diskutieren und Zusammenarbeiten mit Kommilitonen haben.

Im Sinne des Constructive Alignments wurde diese wichtige Kompetenz nicht nur in diesem Live-Voting und einem der wöchentlichen digitalen Übungsblätter während des Lernprozesses, sondern auch in der abschließenden E-Klausur abgefragt:

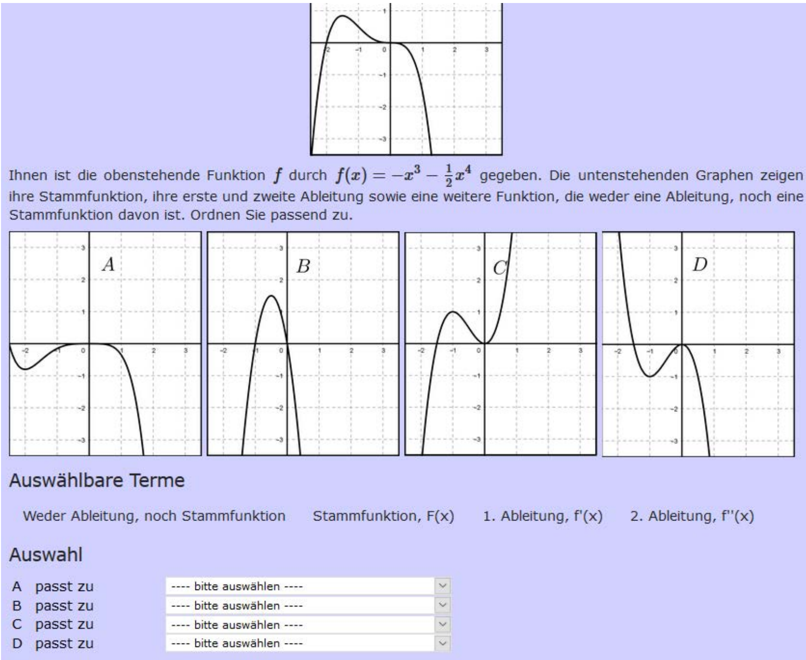


Abb. 4: Prüfung zum Verständnis von Ableitungen in der abschließenden E-Klausur (bzw. in technisch gleicher Form zuvor in digitalen Übungsblättern) auf der Lernplattform „ILIAS“

Bei der Klausuraufgabe war es von besonderer Wichtigkeit, dass die Darstellung besonders klar strukturiert ist und es möglich sein musste, Teilpunkte zu vergeben. So wurden die Funktionen in getrennten Graphen dargestellt und die Aufgabe technisch als Zuordnungsaufgabe implementiert.

Fazit

Digitale Prüfungen sind zwar für verschiedene Kompetenzbereiche unterschiedlich gut einsetzbar, aber grundsätzlich sind digitale Prüfungen in allen Kompetenz- und Anforderungsbereichen möglich. Die Konzeption und Entwicklung guter digitaler Prüfungen ist sehr aufwendig und erfordert hohe fachdidaktische und diagnostische Kompetenzen der Lehrenden. Digitale Prüfungen während des Lernprozesses sind gut mit der anschließenden Förderung und mit möglichen Abschlussprüfungen abzustimmen. In Form eines formativen Assessments bieten sie große Chancen für

1. ein zeitnahes automatisches Feedback und eine darauf abgestimmte adaptive Förderung insbesondere leistungsschwacher Rechner
2. Qualitätsentwicklung (u. a. durch Zieltransparenz und ein dadurch bedingtes Steuerungspotential im Lernverhalten),
3. fachdidaktische Begleitforschung und evidenzbasierte Weiterentwicklung der Mathematiklehre.

Weiter zu entwickeln und zu erforschen, wie sich diese Stärken digitaler Prüfungen in Kombination von fachdidaktischer Expertise, vorhandenen digitalen Mathematikwerkzeugen und intelligenten Algorithmen weiter ausbauen lassen zu einem interaktiven digitalen Diagnose- und Förderwerkzeug, darin besteht eine langfristige Herausforderung. In der Praxis bieten sich als Anknüpfungspunkte z. B. Stellen an, wo angestrebte Kompetenzen im Unterricht nicht erreicht wurden und stark differenziertes Arbeiten notwendig wird.

Dieser Beitrag hat an verschiedensten Beispielen aufgezeigt, wie aufwendig und anspruchsvoll es sein kann, gute kompetenzorientierte digitale Prüfungsaufgaben zu entwickeln. Wenn man demgegenüber stellt, wie einfach es ist, schlichte Rechnungen und Fakten digital zu prüfen, wird offensichtlich, welches Steuerungspotential die Mathematikdidaktik im Kontext digitaler Werkzeuge auf zukünftiges Mathematiklehren hat, wenn sie insbesondere auch den Diskurs um die Entwicklung digitaler Prüfungen mit erforscht und mit gestaltet.

Literatur

Aldon, G. (2019). Part I. Digital Technologies and Assessment. In G. Aldon & J. Trgalová (Hrsg.). Technology in Mathematics Teaching (S. 1-6). Cham: Springer.

Altmann, M., Noack, M., Schmolke, P. & Unger, A. (2019). Mathe mit dem Känguru 2019. Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien … und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8. Berlin.

Boud, D. (1995). Enhancing learning through self-assessment. New York: Routledge.

Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. Higher education, 32(3), S. 347-364.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. ZDM Mathematics Education, 49(5), S. 755-767.

Daniel, M., Köcher, N., & Küstermann, R. (2014). eKlausuren in der angewandten Mathematik – Herausforderungen & Lösungen. In Trahasch, S. et al. (Hrsg.). DeLFI 2014-Die 12. e-Learning Fachtagung Informatik. Bonn: Gesellschaft für Informatik.

Dunlosky, J., Rawson, K., Marsh, E., Nathan, M., & Willingham, D. (2013). Improving students' learning with effective learning techniques: Promising directions from cognitive and educational psychology. Psychological Science in the Public Interest, 14(1), S. 4-58.

Ehlers, J., Guetl, C., Höntzsch, S., Usener, C., & Gruttmann, S. (2013). Prüfen mit Computer und Internet. Didaktik, Methodik und Organisation von E-Assessment. In Ebner, M. & Schön, S. (Hrsg.). L3T. Lehrbuch für Lernen und Lehren mit Technologien, 2. Auflage, URN: urn:nbn:de:0111-opus-83486

GDM (2017) Die Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Eine Chance für den fachdidaktisch reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. Positionspapier der GDM. Mitteilungen der GDM, 103, S. 39-41.

GDM & MNU (2010). Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) sowie des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) zur „Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlichen-technischen Bildung “. Mitteilungen der GDM, 89, S. 32-33.

Helmke, A. (2012). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. 4. aktualisierte Auflage. Seelze: Klett-Kallmeyer.

Johlke, F. (2018) Fehlvorstellungen durch E-Feedback überwinden: Vorstellung eines Dissertationsprojekts. In Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.). Digitales Lernen im Mathematikunterricht (S. 61-70). Hildesheim: Franzbecker.

Jürges, H., Schneider, K., Senkbeil, M., & Carstensen, C. (2012). Assessment drives learning: The effect of central exit exams on curricular knowledge and mathematical literacy. Economics of Education Review, 31(1), S. 56-65.

Kaune, C. (2005). Acht Jahre MUMAS – Eine Recherche in 1000 Unterrichtsszenen zum Variablenverständnis von Gymnasiasten. In C. Kaune, I. Schwank & J. Sjuts (Hrsg.). Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens (S. 131-151). Osnabrück: FMD.

KMK (2016). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/Strategie_neu_2017_datum_1.pdf [03.02.2020]

Marohn, A. & Schmidt, H. (2003). Mehrfachwahlaufgaben als Instrument zur Erforschung von Schülervorstellungen – zur Methodik der Entwicklung einer Mehrfachwahlaufgabe zum Aspekt ‚Stromfluss in wässrigen Lösungen’. Chimica didactica, 29(91), S. 38-51.

Moss, C., & Brookhart, S. (2019). Advancing formative assessment in every classroom: A guide for instructional leaders. ASCD.

Olsher, S. (2019). Making Good Practice Common Using Computer-Aided Formative Assessment. In G. Aldon & J. Trgalová (Hrsg.). Technology in Mathematics Teaching (S. 31-47). Cham: Springer.

Ruchniewicz, H., & Barzel, B. (2019). Technology Supporting Student Self-Assessment in the Field of Functions – A Design-Based Research Study. In G. Aldon & J. Trgalová (Hrsg.). Technology in Mathematics Teaching (S. 49-74). Cham: Springer.

Schulz, A., Leuders, T., & Rangel, U. (2019). The use of a diagnostic competence model about children’s operation sense for criterion-referenced individual feedback in a large-scale formative assessment. Journal of Psychoeducational Assessment, DOI: 0734282918823590.

Wannemacher, K. (2007). Computergestützte Prüfungsverfahren. In: M. Breitner, B. Bruns, F. Lehner (Hrsg.). Neue Trends im E-Learning (S. 427-440). Heidelberg: Physica-Verlag.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2008). Integrating assessment with learning: What will it take to make it work?. In C. Dwyer (Hrsg.) The future of assessment. Shaping Teaching and Learning (pp. 53-82). New York: Routledge.

Weigel, M., Hübl, R., Podgayetskaya, T. & Derr, K. (2018). Potential von STACK-Aufgaben im formativen eAssessment: Automatisiertes Feedback und Fehleranalyse. In Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 1935-1938).

Yerushalmy, M., Nagari-Haddif, G., & Olsher, S. (2017). Design of tasks for online assessment that supports understanding of students' conceptions. ZDM, 49(5), 701-716.

Adressen der Autoren

Marco Böhm	Mathematisches Institut Universität Koblenz-Landau Universitätsstraße 1 56070 Koblenz mboehm@uni-koblenz.de
Merlin Carl	Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik Europa-Universität Flensburg Auf dem Campus 1 24943 Flensburg merlin.carl@uni-flensburg.de
Frederik Dilling	Didaktik der Mathematik Universität Siegen Herrengarten 3 57072 Siegen dilling@mathematik.uni-siegen.de
Hans-Jürgen Elschenbroich	Kirchstr. 26 41352 Korschenbroich elschenbroich@t-online.de
Peter Ferdinand	Institut für Wissensmedien Universität Koblenz-Landau Universitätsstraße 1 56070 Koblenz ferdinand@uni-koblenz.de
Prof. Dr. Gerhard Götz	DHBW Mosbach Oberer Mühlenweg 2-6 74821 Mosbach Gerhard.Goetz@mosbach.dhbw.de
StD Dr. Thilo Höfer	Staufer Gymnasium Mayenner Str. 30 71332 Waiblingen thilo.hoefer@rps-schule.de

Stefan Kohnert	Geschwister-Scholl-Gymnasium Waldkirch Beethovenstr. 9 79183 Waldkirch stefankohnert@gmail.com
Regula Krapf	Mathematisches Institut Universität Koblenz-Landau Universitätsstraße 1 56070 Koblenz krapf@uni-koblenz.de
Dr. Matthias Müller	Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik Technische Universität Braunschweig Bienroder Weg 97 38106 Braunschweig mat.mueller@tu-braunschweig.de
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg	Institut für Mathematik Universität Augsburg Universitätsstraße 14 86159 Augsburg reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
Felicitas Pielsticker	Didaktik der Mathematik Universität Siegen Herrengarten 3 57072 Siegen pielsticker@mathematik.uni-siegen.de
Matthias Radke	German International School Boston 57 Holton Street, Boston MA 02134 matthias.radke@gisbos.org
Dr. Andreas Schnirch	Institut für Mathematik und Informatik Pädagogische Hochschule Heidelberg INF 561 69120 Heidelberg schnirch@ph-heidelberg.de

Alexandra Seifried	German International School Boston 57 Holton Street, Boston MA 02134 alexandra.seifried@gisbos.org
Christian Steinert	Fachbereich Mathematik Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg Universitätsplatz 1 01968 Senftenberg Christian.Steinert@b-tu.de
Andreas Weber	German International School Boston 57 Holton Street, Boston MA 02134 andreas.weber@gisbos.org
Dr. Kirsten Winkel	Fachbereich 03, Lehrstuhl für Statistik Johannes Gutenberg-Universität Mainz Jakob-Welder-Weg 4 55128 Mainz kirsten.winkel@uni-mainz.de
Prof. Dr. Ingo Witzke	Didaktik der Mathematik Universität Siegen Herrengarten 3 57072 Siegen witzke@mathematik.uni-siegen.de