Quand la divergence est nulle

Autour de deux équations de la physique mathématique

Dimitri A. COBB

Exposé donné pour le séminaire des doctorants à Lyon
14 décembre 2020

Résumé

Ces quelques pages sont les notes d'un exposé donné pour le séminaire des doctorants de Lyon. Elles portent principalement le rôle joué par la condition de divergence nulle dans deux problèmes de mécanique des fluides incompressibles : les équations d'Euler et la MHD idéale.

Avant propos

Ces notes sont destinées à un exposé généraliste ayant pour but d'être compris par le plus grand nombre. Si la réussite de cet objectif est incertaine, la tentative n'en demeure pas moins réelle. Ainsi, nous n'avons pas eu honte de donner beaucoup de rappels et de détailler les calculs. Par ailleurs, une grande part de ce que nous disons reste sur le plan formel et nous évitons de trop utiliser la "technologie" fonctionnelle (distributions, espaces de Sobolev, opérateurs pseudo-différentiels, *etc.*) qui rendrait nos arguments rigoureux, même si nous croyons en dire assez pour que l'analyste éveillé s'y retrouve sans trop de mal.

1 Introduction

La divergence d'un champ de vecteurs est un objet récurrent en physique mathématique. Souvent, il est rencontré pour la prmière fois en électrostatique, où le théorème de Gauss affirme que la répartition de la charge électrique ρ dans l'espace est égale[1] à la divergence du champ électrostatique E. En notant $d = 2, 3, ...$ la dimension de l'espace[2] et $E = (E_1, ..., E_d)$ les coordonnées de e, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \rho(x) = \sum_k \partial_k E_k(x) = \operatorname{div}(E) \tag{1}$$

En d'autres termes, la divergence $\operatorname{div}(E)$ permet de trouver l'objet qui est à la *source* de du champ électrique E.

On peut raisonner avec cette même idée de "source" d'une certaine quantité dans de nombreuses situations. Si $\phi(t, x) \in \mathbb{R}^d$ est le flot d'un système de d équations différentielles

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t, x) = u\big(t, \phi(t, x)\big) \\ \phi(0, x) = x, \end{cases} \tag{2}$$

alors le flot préserve le volume tant que u est de divergence nulle. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, alors la condition $\operatorname{div}(u) = 0$ garantit que $|\phi(t, \Omega)| = |\Omega|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'une certaine manière, dire

1. Dès à présent, signalons que nous ignorons toutes les constantes physiques en leur donnant une valeur de 1, ce qu'un bon choix d'unités permet toujours de faire.

2. Nous travaillerons toujours dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, ce qui est naturel pour le physicien, mais aussi le mathématicien qui y dispose d'une transformée de Fourier agréable.

que u est un champ de vecters à divergence nulle, c'est dire que u ne permet pas de "créer du volume", ou qu'il n'y a pas de "source" de volume.

Dans cet exposé, nous allons étudier d'un peu plus près deux équations de la physique mathématique où la condition de divergence nulle joue un rôle prépondérant. Il s'agira toujours de systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) qui décrivent des fluides incompressibles, c'est à dire où le volume de chaque partie du fluide ne change jamais au cours du temps. Si la condition de divergence nulle joue un rôle "physique" (c'est à dire qu'elle traduit l'une ou l'autre des propriétés du modèle), nous allons voir qu'elle change profondément la manière dont un mathématicien approche le problème. Parmi les objets naturels à introduire se trouveront la transformée de Fourier, des projecteurs orthogonaux et des fonctions harmoniques.

2 Les Equations d'Euler incompressibles

Les équations d'Euler incompressibles décrivent un fluide de densité constante, incompressible, et sans viscosité. L'eau liquide, en situation normale, représente de façon assez fidèle ce qu'un tel modèle peut décrire. Ces équations sont :

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_k u_k \partial_k u + \nabla \pi = 0 \\ \operatorname{div}(u) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Sans entrer dans le détail, signalons simplement que la première équation représent un bilan des forces. La seule chose qui peut perturber le mouvement d'un élément de fluide entrainé par la vitesse $u(t,x)$ est la force de pression $\nabla \pi(t,x)$. La deuxième équation, elle, stipule que le fluide est incompressible.

2.1 Incompressibilité et énergie cinétique

La propriété la plus notable des fluides régis par ce système est qu'ils ont une énergie cinétique constante. Ainsi, le fluide, une fois mis en mouvement, ne s'arrêtera jamais. Par exemple, un tourbillon [3] dans un fluide décrit par (3) continue à tourner indéfiniment.

Cette propriété de conservation de l'énergie cinétique n'est pas difficile à démontrer. Si (u,π) est une solution du système (3), l'énergie cinétique associée à cette solution est donnée par l'intégrale [4]

$$E(t) = \frac{1}{2} \int |u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{4}$$

qui fait la somme de toutes les énergies cinétiques $\frac{1}{2}mv^2$ des particules de fluide. Pour démontrer que cette quantité ne dépend pas du temps, nous dérivons et obtenons

$$E'(t) = \int u \cdot \partial_t u \, \mathrm{d}x = -\sum_k \int u_k \partial_k u \cdot u \, \mathrm{d}x - \int \nabla \pi \cdot u \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Regardons ces deux dernières intégrales de plus près. Nous pouvons évaluer la première avec une

3. Nous nommons tourbillon une solution donnée en coordonnées cylindriques par $u = f(r)e_\theta$. S'il est facile de démontrer que l'on définit ainsi une solution stationnaire (indépendante du temps), la stabilité de cette solution est une question bien plus difficile. Nous renvoyons à [6] pour une introduction à ce problème.

4. Cette intégrale, comme toutes les suivantes, seront prises, sauf mention du contraire, sur tout l'espace $\mathbb{R}^d$.

intégration par parties. Cela donne

$$(6)\qquad \begin{aligned} -\sum_{k,j}\int u_k\partial_k u_j u_j\,\mathrm{d}x &= \sum_{k,j}\int u_j\partial_k(u_k u_j)\,\mathrm{d}x = \sum_{j,k}\int u_k u_j\partial_k u_j\,\mathrm{d}x + \sum_{j,k}\int u_j^2\partial_k u_k\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k,j}\int u_k\partial_k u_j u_j\,\mathrm{d}x + \int |u|^2\,\mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k}\int u_k\partial_k u\cdot u\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à la condition d'incompressibilité, cette première intégrale doit être nulle. Tournons-nous vers la deuxième intégrale, contenant le terme de pression. En procédant à nouveau à une intégration par parties, nous trouvons que

$$(7)\qquad \int \nabla\pi\cdot u\,\mathrm{d}x = \sum_k \partial_k\pi u_k\,\mathrm{d}x = -\sum_k \pi\partial_k u_k\,\mathrm{d}x = -\int \pi\,\mathrm{div}(u)\,\mathrm{d}x = 0.$$

A nouveau grâce à la condition d'incompressibilité, nous voyons que la force de pression ne contribue en rien à la variation d'énergie cinétique totale du fluide. Tout cela implique que l'énergie $E(t)$ est constante au cours du temps.

Cette propriété physique –la conservation de l'énergie– traduit quelque chose de très profond sur la nature du problème d'Euler (3). C'est que l'espace naturel dans lequel considérer les solutions est $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, l'espace des champs de vecteurs dont les coefficients sont de carrés intégrables. Le fait que L^2 est un espace de Hilbert n'est pas sans conséquence : nous allons voir que l'étude du système (3) bénéficie grandement d'une approche "géométrique".

2.2 Incompressibilité et orthogonalité

Dans le calcul précédent (7), nous avons montré que toute fonction f de divergence nulle doit vérifier, pour toute fonction Π

$$(8)\qquad \int \nabla\Pi\cdot f\,\mathrm{d}x = -\int \Pi\,\mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Une idée majeure en mécanique des fluides est d'interpréter cette équation intégrale comme une relation d'orthogonalité dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ (noté L^2 dans la suite). L'espace G des fonctions L^2 qui sont des gradients

$$(9)\qquad G = \Big\{f\in L^2, \qquad \exists\, g\,|\ f = \nabla g\Big\}$$

est orthogonal, pour le produit scalaire L^2, à l'espace F des fonctions L^2 de divergences nulles :

$$(10)\qquad F = \Big\{f\in L^2, \qquad \mathrm{div}(f) = 0\Big\}.$$

Nous pouvons même en dire d'avantage.

Proposition 1. *Nous disposons de la somme directe orthogonale $L^2 = F\oplus G$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser des techniques qui reposent sur la transformée de Fourier. Son avantage est de transformer les relations différentielles en relations polynomiales tout en préservant la structure hilbertienne de L^2. Elle est définie par

$$(11)\qquad \forall f\in L^1, \qquad \widehat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

et s'étend naturellement à une isométrie $L^2 \longrightarrow L^2$. Ainsi, dire que $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction de divergence nulle, c'est dire que [5]

$$\widehat{\mathrm{div}(f)}(\xi) = \sum_k \int \partial_k f_k(x) e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x = 0 \tag{12}$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Ces dernières intégrales se calculent en recourant à des intégrations par parties.

$$\widehat{\mathrm{div}(f)}(\xi) = \sum_k i\xi_k \cdot \int f_k(x) e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x = i\xi \cdot \widehat{f}(\xi). \tag{13}$$

Ainsi, dire que le champ de vecteurs $f(x)$ est de divergence nulle, c'est exactement dire que sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ est en (presque) tout point orthogonale au vecteur radial ξ. De la même manière, dire que $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est le gradient d'une certaine fonction $f = \nabla g$, c'est dire que ses coordonnées $f_j = \partial_j g$ vérifient

$$\widehat{f_j}(\xi) = \int \partial_j g(x) e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x = i\xi_j \widehat{g}(\xi), \tag{14}$$

soit encore que $\widehat{f}(\xi) = i\xi\, \widehat{g}(\xi)$, c'est à dire que en (presque) tout point, $\widehat{f}(\xi)$ est un vecteur radial, colinéaire à ξ.

Forts de ces deux interprétations géométriques de F et G, nous pouvons conclure. Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de carré intégrable. Décomposons sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ en partie parallèle et orthogonale à $i\xi$:

$$\widehat{f}(\xi) = \underbrace{\left(\frac{i\xi}{|\xi|} \cdot \widehat{f}(\xi)\right) \frac{i\xi}{|\xi|}}_{\text{parallèle à } i\xi} + \underbrace{\widehat{f}(\xi) - \left(\frac{i\xi}{|\xi|} \cdot \widehat{f}(\xi)\right) \frac{i\xi}{|\xi|}}_{\text{orthogonal à } i\xi} := \widehat{\mathbb{Q}f}(\xi) + \widehat{\mathbb{P}f}(\xi). \tag{15}$$

Pour conclure, remarquons que les deux transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{Q}f}$ et $\widehat{\mathbb{P}f}$ sont toutes les deux de carrés intégrables, puisque ce sont des produits de $\widehat{f}$ avec des fonctions homogènes de degrés zero (qui sont donc bornées). Ce sont donc les transformées de Fourier de deux fonctions, $\mathbb{Q}f$ et $\mathbb{P}f$ respectivement, qui sont aussi de carrés intégrables. Enfin, en vue de ce que nous avons dit plus haut, nous avons $\mathbb{Q}f \in G$ et $\mathbb{P}f \in F$, ce qui termine la démonstration. □

L'opérateur $\mathbb{P}$, que nous avons introduit dans la preuve précédent, est la projection orthogonale $L^2 \longrightarrow F$ (et donc parallèlement à G). Il porte le nom de *projecteur de Leray* [6]. L'utilisation de la décomposition $L^2 = F \oplus G$ jette un lumière nouvelle sur le problème d'Euler. En effet, la première équation dans (3) s'écrit, en séparant les composantes suivant F et G,

$$\partial_t u + \mathbb{P} \sum_k u_k \partial_k u = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla\pi = -\mathbb{Q} \sum_k u_k \partial_k u. \tag{16}$$

Cette méthode permet d'évaluer la pression en fonction du champ des vitesses, mais aussi de bien comprendre ce que signifie l'équation de la divergence $\mathrm{div}(u) = 0$. C'est une contrainte qui spécifie que la solution du problème d'Euler doit toujours être dans F. Autrement dit, nous pouvons voir (3) comme une "équation différentielle [7]" dans l'espace F : si $u(t) = u(t, \cdot) \in F$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u = -\mathbb{P} \sum_k u_k \partial_k u. \tag{17}$$

5. A strictement parler, l'intégrale (12) ne converge pas nécessairement si $f \in L^2$. Cependant, il est possible de raisonner sur une partie dense de L^2 pour obtenir une démonstration parfaitement rigoureuse.

6. D'après Jean Leray 1906-1998, mathématicien fraçais dont les contributions s'étendent de l'algèbre homologique à l'existence des solutions des équations de Navier-Stokes qui portent son nom.

7. Les guillemets sont importants. Pour bénéficier de la théorie de Cauchy-Lipschitz des équations différentielles à valeurs dans un espace de Banach, il faudrait que le membre de droite de cette équation (17) soit une application localement Lipschitzienne $F \longrightarrow F$. Malheureusement, il n'en est rien.

Ce nouveau point de vue permet de voir les équations d'Euler comme la projection orthogonale (sur F) d'un problème différentiel qui serait autrement défini sur l'espace L^2 tout entier, à savoir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = -\sum_k u_k \partial_k u. \tag{18}$$

Ceci permet de voir que le terme de pression et la contrainte d'incompressibilité $\mathrm{div}(u) = 0$ sont très loin d'être des aspects "accidentels" du problème d'Euler uniquement dus à la modélisation. En effet, cette dernière équation, dite de Burgers [8] a un problème sérieux : elle est *mal posée.* C'est à dire que (certaines de) ses solutions maximales n'existent pas pour tout temps, elles explosent en temps fini en développant spontanément des ondes de choc [9].

L'équation projetée (17) a, elle, de meileures chances de ne pas être mal posée, puisque l'application d'une projection orthogonale $\mathbb{P} : L^2 \longrightarrow F$ va empêcher ses solutions d'exploser "dans la direction G". Si cet argument reste très heuristique, il se concrétise néanmoins par un théorème précis.

Theorem 2 ([1] Théorème 7.26 p. 311)**.** *Dans le cas de la dimension $d = 2$, Supposons que la donnée initiale $u_0(x)$ du problème d'Euler soit de carré intégrable et $C^{1,\alpha}$, c'est à dire que les dérivées premières de u_0 sont Hölderiennes. Alors il existe une unique solution globale $u(t, x)$ à valeurs dans ce même espace.*

3 Magnétohydrodynamique idéale

Dans cette partie, nous étudions un système proche du problème d'Euler (3), lequel fait apparaître (pour des raisons physiques indépendantes) une autre condition de divergence nulle : les équations de la magnétohydrodynamique idéale.

Ces équations sont une généralisation du problème d'Euler en ce qu'elles décrivent un fluide qui, en plus de sa dynamique habituelle, est conducteur de courant, et donc génère un champ magnétique qui à son tour agit sur le fluide. Elles s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_k u_k \partial_k u + \nabla \pi = \sum_k b_k \partial_k b - \frac{1}{2}\nabla\left(|b|^2\right) \\ \partial_t b + \sum_k \left(u_k \partial_k b - b_k \partial_k u\right) = 0 \\ \mathrm{div}(u) = 0 \\ \mathrm{div}(b) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

La nouvelle variable est le champ magnétique $b(t, x) \in \mathbb{R}^d$. D'une part, il agit sur les courants qui traversent le fluide par force de Laplace (c'est le membre de droite de la première équation), et d'autre part à son évolution dictée par les équations de Maxwell (les deuxièmes et quatrièmes équations). En prenant $b \equiv 0$, nous retrouvons les équations d'Euler. Avant de commenter d'avantage, notons que la quatrième équation $\mathrm{div}(b) = 0$ (l'équation dite de Maxwell-flux) traduit une propriété physique fondamentale du champ électromagnétique : l'absence de monopoles magnétiques.

S'il peut être tentant de voir le système (19) comme une généralisation des équations d'Euler peu intéressante au mathématicien, une simple variation sur le thème, ce n'est pas le cas, comme en témoigne l'existence de solutions non triviales pour lesquelles la vitesse est nulle $u \equiv 0$ (voir,

8. Johannes Martinus Burgers 1895-1981, physicien néerlandais. Notre équation (18) n'est pas à strictement parler une équation de Burgers, mais elle le devient lorsque l'on se limite à des solutions du type $u(t, x_1, x') = v(t, x_1)w(x')e_1$ où w est une fonction fixée et $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^d$. La fonction u est solution de (18) si et seulement si v est solution de l'équation de Burgers.

9. On peut dire bien plus des équations de ce type. Nous renvoyons à [5], Chapitre 11 pp. 609-658 pour une introduction.

par exemple, la Section 9.8.3 de [2] sur l'équation de Grad-Shafranov). Par ailleurs, nous verrons que ce système introduit de nouvelles difficultés d'ordre bien plus conteptuel que calculatoire.

Contrairement au système d'Euler (3), le système (19) est formellement surdéterminé. En effet, il comporte $2d+2$ équations pour les $2d+1$ variables $(u_1, ..., u_d, b_1, ..., b_d, \pi)$. L'explication de cette anomalie est très simple : la condition de divergence nulle $\operatorname{div}(b) = 0$ est en fait redondante. En effet, la deuxième équation, qui dicte l'évolution du champ magnétique dans le temps, implique que $\operatorname{div}(b)$ ne change pas au cours du temps : en prenant la divergence de cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned}(20) \quad \partial_t \operatorname{div}(b) &= \sum_j \partial_j \partial_t b_j = \sum_{j,k} \Big(\partial_j(u_k \partial_k b_j) - \partial_j(b_k \partial_k u_j)\Big) \\ &= \sum_{j,k} \Big(\partial_j u_k \partial_k b_j - \partial_j b_k \partial_k u_j\Big) + \sum_{j,k} \Big(u_k \partial_k \partial_j b_j - b_k \partial_k \partial_j u_j\Big) \\ &= 0 + u \cdot \nabla \operatorname{div}(b) - b \cdot \nabla \operatorname{div}(u) = 0.\end{aligned}$$

Dès lors, dès que le champ magnétique est initialement de divergence nulle, il doit le rester tout du long de l'évolution du fluide. Cela rend l'équation $\operatorname{div}(b) = 0$ superflue pour décrire la dynamique du fluide. Cependant, comme nous allons le voir, le fait que le champ magnétique soit de divergence nulle sera, à nouveau, d'importance cruciale.

3.1 Conservation de l'énergie

Le système de la magnétohydrodynamique idéale (MHD idéale dans la suite), comme beaucoup de systèmes issus de la physique, possède une quantité conservée (qui ne varie pas au cours du temps), à savoir l'énergie totale du système

$$(21) \qquad E(t) = \int \Big(|u(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2\Big) \,\mathrm{d}x = E_c(t) + E_m(t),$$

qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie magnétique du système. En dérivant cette dernière équation par rapport au temps, nous avons

$$(22) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = \int u \cdot \partial_t u \,\mathrm{d}x + \int b \cdot \partial_t b \,\mathrm{d}x,$$

et nous pouvons, comme nous l'avons fait pour l'équation d'Euler avant, remplacer $\partial_t u$ et $\partial_t b$ par leus valeurs données par le système (19). Pour la première intégrale (celle avec $\partial_t u$), cela donne

$$(23) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_c(t) = -\sum_k \int u_k \partial_k u \cdot u \,\mathrm{d}x - \int \nabla \left(\pi + \frac{1}{2}|b|^2\right) \cdot u \,\mathrm{d}x + \sum_k \int b_k \partial_k b \cdot u \,\mathrm{d}x.$$

Cette relation est en fait très simple : la première intégrale est nulle par le calcul que nous avons déjà fait en (6), et la deuxième équation est le produit scalaire L^2 d'une fonction de divergence nulle $u \in F$ par un gradient, qui est donc élément de G. Il ne reste que

$$(24) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_c(t) = \sum_k \int b_k \partial_k b \cdot u \,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, l'énergie cinétique du fluide n'est pas nécessairement constante : il échange de l'énergie avec le champ magnétique. Regardons maintenant la deuxième intégrale (celle avec $\partial_t b$). Un phénomène très proche se produit :

$$(25) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_m(t) = -\sum_k \int u_k \partial_k b \cdot b \,\mathrm{d}x + \sum_k \int b_k \partial_k u \cdot b \,\mathrm{d}x,$$

et des intégrations par parties pratiquement identiques à celles qu'on a fait avant permettent de montrer que les intégrales du premier terme sont nulles et que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m(t) = -\sum_k \int b_k \partial_k b \cdot u \,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_c(t). \tag{26}$$

Ainsi, l'énergie du champ magnétique n'est pas non plus constante, puisqu'il échange de l'énergie avec le fluide. Mais l'énergie totale est constante. L'énergie cinétique reçue par le fluide est exactement l'énergie cédée par le champ magnétique (et réciproquement). Cette conservation de l'énergie totale $E(t) = E_c(t) + E_m(t)$ indique que l'espace des champs de vecteurs de carré intégrable $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ est, ici encore adapté pour étudier les équations (19) de la MHD.

3.2 Variables d'Elsässer

Nous venons de voir que le système de la MHD idéale (19) possède une quantité conservée : l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie magnétique. Cette conservation est le fruit d'une annulation opportune dans le calcul de la variation de l'énergie et montre qu'il y a une sorte de symétrie entre l'équation "mécanique" et celle du champ magnétique.

Pour voir cela, nous allons nous servir, encore une fois, de la condition de divergence nulle et regarder les termes quadratiques apparaissant dans les équations, c'est à dire les termes impliquant des produits de u et b et leurs dérivées. Regardons par exemple le terme $\sum_k u_k\partial_k b$ apparaissant dans l'équation du champ magnétique. Nous avons, en introduisant la base canonique $(e_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_k u_k\partial_k b = \sum_{k,j} u_k\partial_k b_j e_j = \sum_{k,j}\Big(\partial_k(u_k b_j)e_j - b_j\partial_k u_k e_j\Big) = \sum_{k,j}\partial_k(u_k b_j)e_j - \underbrace{b\,\mathrm{div}(u)}_{=0}. \tag{27}$$

A ce stade, il est commode de regarder le produit tensoriel $u\otimes b$, c'est à dire la matrice des $(u_k b_j)_{k,j}$. Nous définissons encore la divergence de celle-ci par

$$\mathrm{div}(u\otimes b) = \sum_{k,j}\partial_k(u_k b_j)e_j = \sum_k u_k\partial_k b. \tag{28}$$

En faisant de même avec les autres termes quadratiques, nous trouvons que le système (19) se réecrit de la façon suivante : (rappelons que l'équation $\mathrm{div}(b) = 0$ est redondante)

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}(u\otimes u - b\otimes b) + \nabla\left(\pi + \frac{1}{2}|b|^2\right) = 0 \\ \partial_t b + \mathrm{div}(u\otimes b - b\otimes u) = 0 \\ \mathrm{div}(u) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Cette nouvelle forme du système met en évidence un changement de variables : au vu de l'identité $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ et de la différence $u^{\otimes 2} - b^{\otimes 2}$ apparaissant dans la première équation, il est très tentant de poser

$$\alpha = u + b \qquad \text{et} \qquad \beta = u - b, \tag{30}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \alpha\otimes\beta &= (u+b)\otimes(u-b) = u\otimes u - b\otimes b - \big(u\otimes b - b\otimes u\big) \\ \beta\otimes\alpha &= (u+b)\otimes(u-b) = u\otimes u - b\otimes b + \big(u\otimes b - b\otimes u\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Ainsi, en prenant la somm et la différence des deux premières équations, nous obtenons un système portant sur les variables α et β, à savoir

$$\begin{cases} \partial_t\alpha + \mathrm{div}(\beta\otimes\alpha) + \nabla\pi_1 = 0 \\ \partial_t\beta + \mathrm{div}(\alpha\otimes\beta) + \nabla\pi_2 = 0 \\ \mathrm{div}(\alpha) = 0 \\ \mathrm{div}(\beta) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Avant de poursuivres, faisons quelques remarques sur ce nouveau système d'EDP. Premièrement, les variables α et β se nomment "variables d'Elsässer [10]" et sont connues des physiciens depuis 1950, qui s'en servent principalement pour étudier la propagation d'ondes (dites d'Alfvén) dans les équations de la MHD linéarisée.

Ensuite, il est beaucoup plus symétrique que le système (29) original : il est composé d'essentiellement deux équations qui sont "assez peu" couplées. Cela s'exprime, par exemple, dans le fait que deux quantités naturelles sont conservées : les intégrales

$$E_1(t) = \int |\alpha(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad E_2(t) = \int |\beta(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x \tag{33}$$

ne dépendent pas du temps. La conservation de $E_1(t) + E_2(t)$ se comprend assez bien, puisqu'il s'agit de l'énergie totale su système. Mais, nous voyons qu'il y a, en plus, une nouvelle quantité conservée, l'*hélicité croisée*, à savoir

$$H_c(t) = \int u \cdot b \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 \right) \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Sans donner plus de détails, disons simplement que l'hélicité croisée représente la manière dont les tubes de courant et les tubes de champ magnétiques s'enlacent.

Troisièmement, nous pouvons faire une remarque sur la manière dont nous avons écrit le système (32) d'Elsässer. Nous avons introduit deux noms, π_1 et π_2 pour des quantités qui sont *a priori* égales, à savoir

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi + \frac{1}{2}|b|^2. \tag{35}$$

Par ailleurs, nous voyons que les deux dernières équations $\mathrm{div}(\alpha) = 0$ et $\mathrm{div}(\beta) = 0$ ne sont pas la traduction exacte de la seule contrainte de divergence nulle $\mathrm{div}(u) = 0$ qui était utile au système.

Cependant, avoir deux noms différents pour ces mêmes fonctions présente deux avantages conséquents. Tout d'abord, prendre $(\alpha, \beta, \pi_1, \pi_2)$ comme étant les $2d + 2$ inconnues du problème correspond bien au fait que le système (32) comporte $2d + 2$ équations. Ensuite, cela permet de voir les gradients $\nabla\pi_1$ et $\nabla\pi_2$ comme étant les projections orthogonales, dans L^2, sur l'espace des fonctions de divergences nulles. Autrement dit, en reprenant l'opérateur $\mathbb{P} : L^2 \longrightarrow L^2$ de projection, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha + \mathbb{P}\,\mathrm{div}(\beta \otimes \alpha) = 0 \\ \partial_t \beta + \mathbb{P}\,\mathrm{div}(\alpha \otimes \beta) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Enfin, ces nouvelles variables ne sont pas seulement une technique donnant un confort de calcul et des équations plus simples. Elles sont d'importance critique pour la théorie de l'existence et de l'unicité des solutions à ces équations : le système d'origine est (19) est un système symétrique d'EDP hyperboliques quasi-linéaires, ce qui signifie que la complexité des équations telles qu'elles sont interdit de chercher des solutions dans des espaces de fonction qui ne sont pas de Hilbert. Inversement, les équations en variables d'Elsässer sont beaucoup plus agréables, puisque ce sont essentiellement des équations de transport, ce qui signifie qu'elles auront (par exemple) des solutions dans tous les espaces de Besov basés sur L^p, $p \neq 2$. Nous renvoyons à [3] et [4] pour une discussion plus détaillée.

10. Ces quantités sont nommés d'après Walter M. Elsasser (1904-1991), le physicien germano-américain qui les introduit. L'orthographe de son nom, comportant ou non un *umlaut* suivant les textes, semble avoir prêté à confusion chez les physiciens.

3.3 Equivalence des deux systèmes

Nous terminons ce texte par une remarque sur les deux systèmes : celui de la MHD (29) et celui des variables d'Elsässer (32). S'il semble clair que le système en variables d'Elsässer s'obtient à partir des équations de la MHD, la réciproque n'est pas évidente. En effet, en prenant la somme et différence des deux premières équations de (32), nous obtenons

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u - b \otimes b) + \frac{1}{2}\nabla(\pi_1 + \pi_2) = 0 \tag{37}$$

et

$$\partial_t b + \operatorname{div}(u \otimes b - b \otimes u) = \frac{1}{2}\nabla(\pi_2 - \pi_1), \tag{38}$$

si bien que nous ne retrouvons le système de départ que si $\nabla\pi_1 = \nabla\pi_2$, alors que l'intérêt du système (32) réside précisément dans le fait que ces deux fonctions ne sont pas *a priori* égales !

Pour résoudre ce problème, nous prenons la divergence (encore !) de l'équation (38). La divergence d'un gradient étant un opérateur laplacien $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_d^2$, nous trouvons que

$$\frac{1}{2}\Delta(\pi_2 - \pi_1) = \sum_{j,k} \partial_j\partial_k\big(u_j b_k - b_j u_k\big) = 0. \tag{39}$$

Ainsi, la fonction $Q = \pi_2 - \pi_1$ est harmonique. C'est une très gross contrainte à imposer sur une fonction intervenant dans une EDP ! En effet, les fonctions harmoniques, commes les fonctions holomorphes, si elles sont très régulières, ont toujours une très forte croissance à l'infini $|x| \to +\infty$, à moins d'être constantes. Cela les empêche, par exemple, d'être des fonctions L^2 ou L^1, ou même des dérivées de ces fonctions.

C'est ce constat qui nous sauve de l'embarras. En effet, la fonction ∇Q (qui est harmonique en tant que dérivée d'une fonction harmonique) rentre exactement dans ce cadre là : sous l'hypothèse que u et b sont des fonctions L^2, c'est à dire si l'on suppose que le système physique a une énergie totale finie (et donc constante), nous trouvons, formellement,

$$\frac{1}{2}\nabla Q = \partial_t b + \operatorname{div}(u \otimes b - b \otimes u) = \text{ fonction } L^2 \ + \ \text{ dérivée d'une fonction } L^1, \tag{40}$$

si bien qu'il n'est pas difficile de montrer que $\nabla Q = 0$ (nous renvoyons à [4] pour une démonstration complète).

Avant de finir, notons que l'hypothèse "raisonnable" de solutions d'énergie finie est employée de façon cruciale. En fait, s'il est possible de généraliser cette démonstration à certaines fonctions d'énergie finie, on ne peut le faire sans certaines hypothèses sur le comportement à l'infini $|x| \to +\infty$ des solutions. Il est même facile de construire des exemples de solutions (α, β) du système (32) qui ne donnent pas des solutions des équations de la MHD (29) ! Prenons par exemple la solution donnée par

$$\alpha(t, x) = f(t)e_1 = -\beta(t, x). \tag{41}$$

Ces fonctions résolvent les équations à condition de prendre

$$\pi_1(t, x) = -f'(t)x_1 + Cte = -\pi_2(t, x). \tag{42}$$

En reavnche, en formant la somme et la différence de ces solutions, nous trouvons que les variables "physiques"

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \tag{43}$$

sont solutions de l'équation

$$\partial_t b + \operatorname{div}(u \otimes b - b \otimes u) = f'(t)e_1, \tag{44}$$

qui peut très bien ne pas être nulle.

Références

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin : *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 343. Springer, Heidelberg, 2011.

[2] P. M. Bellam : "*Fundamentals of Plasma Physics.* Cambridge University Press, Cambridge NY, 2006.

[3] Dimitri Cobb et Francesco Fanelli : *Rigorous derivation and well-posedness of a quasi-homogeneous ideal MHD system.* (soumis), arXiv :2007.15094v1.

[4] Dimitri Cobb et Francesco Fanelli : *Elsässer formulation of the ideal MHD and improved lifespan in two space dimensions.* (soumis), arXiv :2009.11230v1.

[5] L. C. Evans : *Partial Differential Equations.* 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, USA, 2010.

[6] T. Gallay : *Stability of Vortices in Ideal Fluids : the Legacy of Kelvin and Rayleigh.* Proceedings of the XVII International Conference on Hyperbolic Problems (HYP2018), AIMS, 2019.