Kleine AG: Gromov-Witten-Invarianten II

Organisatoren: Timo Schürg (tschuerg@mathematik.uni-mainz.de)
Pawel Sosna (sosna@math.uni-bonn.de)

am 07.02.2009 in Bonn

Einleitung

In der letzen kleinen AG haben wir gelernt, wie man die Anzahl von Kurven durch einige vorgegebene Zykel in einer glatten Varietät richtig bestimmt. Dazu haben wir einen Modulraum konstruiert, der gerade solche Kurven parametrisiert. Die Anzahl der Kurven konnte dann bestimmt werden, indem wir die Kohomologieklassen, die zu den vorgegebenen Zykeln gehören, über Auswertungsabbildungen auf den Modulraum zurückgezogen, dort mit der Fundamentalklasse des Modulraums gecappt und schließlich integriert haben. Wenn die Dimensionen der vorgegebenen Zykel nicht so gewählt sind, dass wir nach dem Cappen in Dimension Null landen, ist das gesamte Integral natürlich Null. Es gibt dann keine Kurven, die durch diese Zykel gehen.

Nun beginnen allerdings die Probleme. Aus geometrischen Überlegungen weiß man, in welchen Fällen die Zahl nicht Null sein sollte. Wenn man alle Abbildungen von Kurven in unsere gewählte Varietät unobstruiert deformieren kann, ist die Dimension des Modulraums auch gerade so, dass tatsächlich die Invarianten mit den geometrsichen Überlegungen übereinstimmen. Sobald dies jedoch nicht mehr der Fall ist, passt die Dimension des Modulraums nicht mehr. In diesem schlechten Fall ist der Modulraum zu groß, wir landen nach Cappen nicht in Dimension Null, und obwohl wir eine Invariante ungleich Null erwartet hätten, erhalten wir Null. Dieses Problem kann man jedoch lösen, in dem man statt mit der echten Fundamentalklasse des Modulraums mit einer virtuellen Fundamentalklasse rechnet. Die Dimension dieser virtuellen Fundamentalklasse ist gerade so gewählt, dass tatsächlich die erhaltenen Invarianten mit den geometrischen Überlegungen übereinstimmen.

Das Programm dieser AG teilt sich in zwei Teile auf. Zunächst wollen wir verstehen, unter welchen Voraussetzungen man ganz allgemein eine solche virtuelle Fundamentalklasse in der erwarteten Dimension eines Raums konstruieren kann. Im letzten Vortrag wollen wir dann nachrechnen, dass diese Voraussetzungen für den Modulraum der stabilen Abbildungen erfüllt sind.
Jeder Vortrag sollte wie immer 45 Minuten dauern.

Programm

1. Vortrag: Wiederholung und Motivation
Zunächst wiederhole man kurz, was stabile Kurven bzw. Abbildungen sind, erkläre, dass Modulräume dieser Objekte existieren und erinnere an die Definition der Gromov-Witten-Invarianten für den projektiven Raum aus der letzten kleinen AG.
Wir werden Fakten aus der Schnitttheorie brauchen, insbesondere über Kegel. Eine kurze Übersicht der für uns wesentlichen Aussagen findet man z.B. in [BF], S. 5-9. Es ist wohl sinnvoll bei der Ausführung Stacks etwas zu unterdrücken und so zu tun, als ob man über Schemata redet. Wenn die Zeit reicht, kann man die Lemmata 1.1 und 1.3 beweisen, den Beweis der Prop. 3.4 brauchen wir hingegen nicht. Es könnte sinnvoll sein auch [F] zu konsultieren: Die Beschreibung der Kegel findet man dort im Anhang (B.5, B.6) und die exakte Sequenz von Kegeln ist Bsp. 4.1.6.
Nach dieser kurzen Wiederholung sollte der größte Teil des Vortrags darauf verwendet werden, Abschnitt 2.10.2 aus [KV] zu besprechen und am Beispiel der generischen Quintik im $\mathbb{P}^4$ zu erläutern, warum man eine virtuelle Fundamentalklasse braucht.

2. Vortrag: Der intrinsische Normalenkegel
Die Referenz für diesen Vortrag ist [Be]. Wir werden die Stack Quotienten eines Kegels nach einem Vektorbündel brauchen und daher beginnen wir mit der Diskussion auf S. 38-40. Am Ende sollte man kurz erwähnen, dass man diese lokale Definition global machen kann, siehe Def. 3.1.
Nun kommen wir zum Begriff des intrinsischen Normalenkegels: Im Wesentlichen folge man der Beschreibung auf den S. 41-43: Man starte mit (Morphismen von) lokalen Einbettungen, erkläre wie man damit exakte Sequenzen von Kegeln und daraus einen Kegelstack gewinnt und beweise Prop. 3.2, die die Dimension dieses Stacks beschreibt. Man gehe dann kurz auf die intrinsische Normalengarbe sowie auf die Prop. 3.3-3.5 ein. Wenn die Zeit reicht, darf man diese Propositionen auch gerne beweisen.

3. Vortrag: Obstruktionstheorie
Wiederum ist die Referenz [Be]. Wir beginnen mit dem Beispiel auf S.46. An diesem Beispiel sollte der Begriff der erwarteten Dimension erläutert werden. Das erste Ziel ist, die beiden Eigenschaften des auf S.47 eingeführten Vektorbündelstacks zu verstehen. Dann führe man die Def. 3.7 an und erkläre, welche geometrische Interpretation diese hat.
Nun beginnen wir mit der Anwendung auf den Fall des Modulraums der stabilen Abbildungen. Auf S. 48 wird für den Fall $X = \mathrm{Mor}(C, W)$ gezeigt, dass dieser eine perfekte Obstruktionstheorie besitzt. Einige der ohne Beweis benutzten Aussagen finden sich mit Beweis im Abschnitt 3.4.1 von [Se], allerdings wird dafür wahrscheinlich die Zeit nicht reichen.

4. Vortrag: Definition der virtuellen Fundamentalklasse
In diesem Vortrag wollen wir die tatsächliche Konstruktion der Klasse in Angriff nehmen. Dazu brauchen wir, dass unsere Obstruktionstheorie eine globale Auflösung besitzt. Der intrinsische Normalenkegel ist ein abgeschlossener Unterstack des Vektorbündelstacks, der zur Obstruktionstheorie gehört. Auf S. 50 unten in [Be] wird erläutert, wie man hieraus die virtuelle Fundamentalklasse gewinnt. Als weitere Referenz empfielt sich S. 38 in [BF]. Auch sollte gezeigt werden, warum diese Klasse in der erwarteten Dimension lebt. Als Anwendung sollte Beispiel 3.8 vorgeführt in [Be] werden. Falls noch Zeit ist, kann noch Proposition 5.3 aus [BF] gezeigt werden.

5.Vortrag: Die virtuelle Fundamentalklasse im Fall des Modulraums der stabilen Abbildungen
Abschließend wollen wir nun zeigen, dass der Modulraum der stabilen Abbildungen eine perfekte Obstruktionstheorie mit globaler Auflösung besitzt. Hierzu müssen wir in die relative Situation wechseln und den Modulraum der stabilden Abbildungen mit seinem Morphismus in den Modulraum der prästabilen Kurven betrachten, der einfach die Abbildung vergisst. Die Fasern dieses Morphismus sind von der Form $\mathrm{Mor}(C, W)$. Dies ist näher auf den Seiten 35 und 36 von [Be] erklärt, außerdem noch auf S. 2 von [Be2]. In Vortrag 3 haben wir bereits gezeigt, dass wir faserweise eine perfekte Obstruktionstheorie haben. Wir brauchen also nur noch, dass diese Obstruktionstheorie eine globale Auflösung besitzt. Dies ist Prop. 5 in [Be2].

Literatur

[Be] Behrend, K.: *Algebraic Gromov-Witten Invariants*, `www.math.ubc.ca/~behrend/preprints.html`

[Be2] Behrend, K.: *Gromov-Witten Invariants in Algebraic Geometry* `www.math.ubc.ca/~behrend/preprints.html`

[BF] Behrend, F. und Fantechi, B.: *The intrinsic normal cone*, `www.math.ubc.ca/~behrend/preprints.html`

[F] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Springer

[KV] Kock, J.; Vainsencher. I.: *An Invitation to Quantum Cohomology*, Birkhäuser

[Se] Sernesi, E.: *Deformations of Algebraic Schemes*, Springer