Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen in $\mathbb{C}$ konvergieren:

(a) $\sum_n (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+2)^2-1}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_n \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ (2 Pkt.)

(c) $\sum_n \left(\frac{1-i}{2+i}\right)^n$ (2 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $a_n := \frac{n+1}{(n+2)^2-1} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) eine monoton fallende Folge:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{(n+3)^2-1} \frac{(n+2)^2-1}{n+1} = \frac{n+2}{n^2+6n+8} \frac{n^2+4n+3}{n+1} = \frac{1}{n+4}(n+3) < 1.$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_n (-1)^{n+1} a_n = -\sum_n (-1)^n a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium.

(b) Für $a_n := \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ gilt $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und insbesondere ist (a_n) keine Nullfolge. Hieraus folgt dass $\sum_n a_n$ nicht konvergiert.

(c) Die Potenzreihe $\sum_n x^n$ hat Konvergenzradius 1. Deshalb konvergiert die Reihe für $x := \left|\frac{1-i}{2+i}\right| < 1$ (siehe Satz 6.21). □

Aufgabe 2 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt *Lipschitz-stetig* mit Konstante $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ falls für alle $x, x' \in X$ stets $d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x')$ gilt.

(a) Zeigen Sie dass jede Lipschitz-stetige Funktion (überall) stetig ist. (2 Pkt.)

(b) Sei X ein metrischer Raum, $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und F eine Menge von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, die alle Lipschitz-stetig mit Konstante L sind. Man nehme an dass ein $x_0 \in X$ mit $\inf_{f\in F} f(x_0) \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie dass die Funktion

$$g(x) := \inf_{f\in F} f(x)$$

Werte in $\mathbb{R}$ annimmt und Lipschitz-stetig mit Konstante L ist. (3 Pkt.)

(c) Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nichtleer. Zeigen Sie dass die Abstandsfunktion $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a\in A} d(x, a),$$

Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist. (1 Pkt.)

(d) Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \sqrt{x}$, nicht Lipschitz-stetig ist. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $f : X \to Y$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Sei $\epsilon > 0$ und $a \in X$ beliebig. Wir wählen $\delta = \epsilon/L$. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $d(a, x) < \delta$ dass

$$d(f(a), f(x)) \leq L d(a, x) < L\delta = \epsilon.$$

Hiermit haben wir gezeigt dass f stetig ist.

(b) Für $x, y \in X$, sei (oBdA) $g(x) \geq g(y)$ (sonst vertauschen wir x und y). Dann bekommen wir

$$|g(x) - g(y)| = \inf_{f\in F} f(x) - \inf_{f\in F} f(y) = \inf_{f\in F} f(x) + \sup_{f\in F}(-f(y)) = \sup_{f\in F}(\inf_{\tilde{f}\in F} \tilde{f}(x) - f(y))$$
$$\leq \sup_{f\in F}(f(x) - f(y)) \leq \sup_{f\in F}|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y).$$

Nehmen wir $y = x_0$ und benutzen wir die Annahme $g(x_0) \in \mathbb{R}$ (d.h., $g(x_0) \neq \pm\infty$), so folgt hieraus insbesondere $g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Wir wenden den vorherigen Aufgabenteil mit der Funktionenmenge $F = \{d(\cdot, a) \mid a \in A\}$ an. Es reicht also zu zeigen dass jede dieser Funktionen Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist. Dies ist eine direkte Konsequenz der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

(d) Widerspruchsbeweis: Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L, dann folgt für alle $x > 0$ dass

$$\sqrt{x} = |f(x) - f(0)| \leq L|x - 0| = Lx,$$

und somit $x \geq 1/L^2$. Für $0 < x < 1/L^2$ ist das ein Widerspruch, und deshalb kann f nicht Lipschitz-stetig sein. □

Aufgabe 3 (Hölder-Stetigkeit)**.** Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig (zum Exponenten α) falls

$$C_\alpha(f) := \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Hölder-stetige Funktion ist stetig. (2 Pkt.)

(b) Die Funktion $f(x) := x^\alpha$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Hölder-stetig (zum Exponenten α). (3 Pkt.)

(c) Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Ist f Hölder-stetig zum Exponenten β, dann ist f auch Hölder-stetig zum Exponenten α. (2 Pkt.)

(d) Sei nun $\alpha > 1$. Ist f Hölder-stetig zum Exponenten α, dann ist f konstant. (3 Pkt.)

Lösung. (a) Gegeben $\epsilon < 0$ wählen wir $\delta := (\epsilon/C_\alpha(f))^{1/\alpha}$. Für alle $x, y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}|x - y|^\alpha < C_\alpha(f)\delta^\alpha = \epsilon.$$

(b) Für $r \in (0, 1)$ gilt $r \leq r^\alpha$. Sei (oBdA) $0 \leq x < y$. Dann folgt

$$1 - \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \leq 1 - \frac{x}{y} \leq \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha,$$

und deshalb

$$|x^\alpha - y^\alpha| = y^\alpha\left(1 - \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\right) \leq y^\alpha\left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha = |x - y|^\alpha.$$

Damit haben wir gezeigt dass $C_\alpha(f) \leq 1$.

(c) Es gilt

$$C_\alpha(f) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta}|x-y|^{\beta-\alpha} \le C_\beta(f)(b-a)^{\beta-\alpha} < \infty.$$

(d) Seien $x, y \in (a,b)$ fest mit $x < y$. Wir müssen zeigen dass $f(x) = f(y)$. Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ und definiere $x_k := x + \frac{k}{n}(y-x)$ für $k = 0, \dots, n$. Dann berechnen wir

$$|f(x)-f(y)| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \le nC_\alpha(f)|\tfrac{1}{n}(y-x)|^\alpha \le C_\alpha(f)(y-x)^\alpha n^{1-\alpha}.$$

Da $1-\alpha < 0$, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ mit $C_\alpha(f)(y-x)^\alpha n^{1-\alpha} < \epsilon$. Wir haben also gezeigt dass $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ und somit $|f(x)-f(y)| = 0$. □

Aufgabe 4 (Endliche Durchschnittseigenschaft)**.** Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft* wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\cap\mathcal{F}' \neq \emptyset$.
Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind. (6 Pkt.)

(a) X ist kompakt.

(b) Jede Menge $\mathcal{F}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt, also $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Lösung. **(a) $\Longrightarrow$ (b):** Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Widerspruchsbeweis: wir nehmen an dass $\cap\mathcal{F} = \emptyset$. Dann ist

$$\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^\complement = \left(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\right)^\complement = \emptyset^\complement = X,$$

und deshalb ist $\mathcal{F}^\complement = \{F^\complement \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ mit $X = \bigcup_{F\in\mathcal{F}'} F^\complement$, und es folgt

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F = \left(\bigcup_{F\in\mathcal{F}'} F^\complement\right)^\complement = X^\complement = \emptyset.$$

Aber dies widerspricht die endliche Durchschnittseigenschaft, und deshalb muss gelten $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $\mathcal{G}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist

$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G^\complement = \left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^\complement = X^\complement = \emptyset,$$

und nach Annahme folgt dass $\mathcal{G}^\complement$ die endliche Durchschnittseigenschaft *nicht* erfüllt. Das heißt, es existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ mit $\bigcap_{G\in\mathcal{G}'} G^\complement = \emptyset$. Hieraus folgt dass $\mathcal{G}'$ eine endliche Teilüberdeckung ist:

$$\bigcup_{G\in\mathcal{G}'} G = \left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}'} G^\complement\right)^\complement = \emptyset^\complement = X,$$

und somit ist X kompakt. □